

Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm

010

=Übungskapitel

Ein Einstieg zum Kapitelblock „Terme, Formeln und Gleichungen“

Textgleichungen

Konflikte Kopfnüsse

Erforderlicher Wissensstand (->Stoffübersicht im Detail und know-how-Theorie ->siehe auch Wissensleuchtturm der UE-und 3.Kl.)

Lösen einer mathematischen Gleichung mittels Umformen (Äquivalenzumformen)

Kenntnis der „Vokablen“ zur Übersetzung vom Deutschen (Text) ins „Mathematische“ (Sprache der Mathematik)

Ziel dieses Kapitels (dieses Übungsleuchtturms) ist:

Training und Festigung des Lösen einer mathematischen Gleichung mittels Umformen (Äquivalenzumformen)

Kenntnis der „Vokablen“ zur Übersetzung vom Deutschen (Text) ins „Mathematische“ (Sprache der Mathematik)

Alle Formeln, Erklärungen und Musterbeispiele (ab Seite 6) zu diesem Übungsleuchtturm findest du wie gewohnt hier im Lösungsteil (ab Seite 4)!!

Lösungen findest du ab Seite 4

Beachte den Theorieteil (Wissen) ab Seite 6 !

*Bei den Musterbeispielen im **Lösungsteil** ab Seite 6 findest du eine jeweilige Entsprechung zum Beispiel der nun folgenden Aufgabensammlung Ü1 bis Ü15. Dies bedeutet die Aufgabe ist genauso oder ähnlich zu lösen wie das Musterbeispiel.*

*Ebenfalls findest du im **Lösungsteil** alle „Vokablen“ zur Übersetzung vom Deutschen (Text) ins „Mathematische“ (Sprache der Mathematik)*

Die Solarzellen des Übersetzungscomputers „Mathematisch-Deutsch/ Deutsch-Mathematisch“ von Universitätsassistent John Sigma Epsilon sind leider defekt, so ist es ihm leider nicht möglich, die Lösungen dieser Textaufgaben durchzuführen.

Kannst du ihm helfen??

Setze den folgenden Text jeweils in eine Gleichung um und löse sie mittels Äquivalenzumformungen! –schreibe alle Umformungen an!!!! Vergiss nicht auf den Antwortsatz!

Arbeite Schritt für Schritt! Mache am Ende die Probe als Kontrolle für dein Rechnen!

Übersetze vom „Deutschen ins Mathematische“!!!

Ü1 Das *Elftel einer Zahl* vermindert um 19 ergibt 334. Wie lautet die Zahl???

Ü2 Die *Summe aus dem Drittel, Siebenundzwanzigstel und Neuntel* einer Zahl ergibt 24.

Gib die Zahl an.

Ü3 Die *Differenz aus dem Vierfachen einer Zahl und ihrem Sechstel* ergibt 3.

Wie lautet die Zahl???

Ü4 Der *vierzehnte Teil einer Zahl vermehrt um ihren siebenten Teil* ergibt 1224.

Wie lautet die Zahl???

Ü5 Das *Dreifache einer Zahl vermindert um die Summe aus der Hälfte der Zahl und 4* ergibt 224. Wie lautet die Zahl???

Ü6 Das *Produkt aus 38 und 57 vermehrt um das Drittel einer Zahl und 56* ergibt 30.

Wie lautet die Zahl???

Ü7 *very chilling*

Das Produkt aus 47 und 29 vermehrt um *die Summe aus dem Siebtel einer Zahl* und 26 ergibt 505. Wie lautet die Zahl???

Ü8 Der Quotient aus 5562 und 3 ist gleich dem *Dreißigstel einer Zahl vermindert um 88*. Wie lautet die Zahl???

Ü9 Der *Quotient aus dem Doppelten einer Zahl und 5* ist so groß wie das Dreifache dieser Zahl vermehrt um 16. Wie lautet die Zahl???

Ü10 Von welcher Zahl ist *ihr Produkt mit 113 so groß wie der zehnte Teil von 2034*?

Beispiele mit „größer /kleiner als.....“

Ü11 Das Zehnfache einer Zahl ist um 91 größer als ein *Viertel der Zahl*. Wie lautet die Zahl???

Ü12 Der dreizehnte Teil einer Zahl ist um 17 kleiner als das *Vierfache einer Zahl*. Wie lautet die Zahl???

Ü13 Von welcher Zahl ist *ein Achtel um 47 kleiner* als 398?

Ü14 Von welcher Zahl ist die Summe aus *ihrem Drittel und 33* um 229 größer als 888?

Ü15 Das *Dreizehnfache der um 6 verminderten Zahl* ist um 9 größer als das *Fünftel* dieser Zahl. Wie lautet die Zahl???

Lösungen

Übungsleuchtturm 010

Du findest hier auch den **vollständigen Lösungsansatz der Gleichung**, also die mathematische Übersetzung vom Text in eine Gleichung!(denn dieser ist das entscheidende als erster Schritt der Rechnung und viel zum Denken; das Lösen der Gleichung ist eher mehr automatisiert....!)

$$\text{Ü1} \quad \frac{x}{11} - 19 = 334 \quad x = 3883$$

$$\text{Ü2} \quad \frac{x}{3} + \frac{x}{27} + \frac{x}{9} = 24 \quad x = \frac{648}{13} = 49,8462$$

$$\text{Ü3} \quad 4x - \frac{x}{6} = 3 \quad x = \frac{18}{23} = 0,782609$$

$$\text{Ü4} \quad \frac{x}{14} + \frac{x}{7} = 1224 \quad x = 5712$$

$$\text{Ü5} \quad 3x - \left(\frac{x}{2} + 4 \right) = 224 \quad x = \frac{456}{5} = 91,2$$

$$\text{Ü6} \quad 38 \cdot 57 + \frac{x}{3} + 56 = 30 \quad x = -6576$$

$$\text{Ü7} \quad 47 \cdot 29 + \frac{x}{7} + 26 = 505 \quad x = -6188$$

$$\text{Ü8} \quad \frac{5562}{3} = \frac{x}{30} - 88 \quad x = 58260$$

$$\text{Ü9} \quad \frac{2x}{5} = 3x + 16 \quad x = -\frac{80}{13} = -6,15385$$

$$\text{Ü10} \quad x \cdot 113 = \frac{2034}{10} \quad x = \frac{9}{5} = 1,8$$

$$\text{Ü11} \quad 10 \cdot x = \frac{x}{4} + 91 \quad x = \frac{28}{3} = 9,33333$$

$$\text{Ü12} \quad \frac{x}{13} = 4x - 17 \quad x = \frac{13}{3} = 4,33333$$

$$\text{Ü13} \quad \frac{x}{8} + 47 = 398 \quad \text{oder} \quad \frac{x}{8} = 398 - 47 \quad x = 2808$$

$$\text{Ü14} \quad \frac{x}{3} + 33 = 888 + 229 \quad x = 3252$$

$$\text{Ü15} \quad 13 \cdot (x - 6) = \frac{x}{5} + 9 \quad x = \frac{435}{64} = 4,60938$$

Hier nun die Theorie sowie viele Musterbeispiele

Es soll die folgende Textgleichung in \mathbb{Q} (also über der Grundmenge \mathbb{Q}) gelöst werden:

Musterbsp.Nr.001:

Das Achtefache einer natürlichen Zahl, vermehrt um 13, ergibt 99.

Wie lautet die (rationale) Zahl???

Was bedeutet nun „Lösen“???

Wir wollen dies so einfach als möglich erklären:

Lösen heißt, einen grammatikalischen Text Schritt für Schritt in die Sprache der Mathematik zu übersetzen.

Die „Vokabeln“, die du dabei zur Verfügung hast, und für das Lösen von Textgleichungen benötigst, sind:

Wir lernen **Deutsch-Mathematisch**

x.....Zahl

x ist die **Variable** oder **Platzhalter**- das, was wir suchen oder ausrechnen sollen

das.....fache einer Zahl ->>> x malodermal x ->• x = x•.....

Hier in unserem Bsp.: das Achtefache einer Zahl-> $8 \cdot x = x \cdot 8$

Das Doppelte-> $2 \cdot x = x \cdot 2$

Das Dreifache-> $3 \cdot x = x \cdot 3$

Der.....te Teil einer Zahl→ $x : \dots = \frac{x}{\dots}$ (dividiert durch)

Bsp.: der neunte Teil einer Zahl oder ein Neuntel -> $x : 9 = \frac{x}{9}$



Ver mehrt um->>>> + (plus.....)ist eine Zahl

Ver mindert um->>>> - (minus.....)ist eine Zahl

Summe..... Ergebnis der Addition (Plusrechnung)

Differenz.... Ergebnis der Subtraktion (Minusrechnung)

Produkt.... Ergebnis der Multiplikation

Quotient..... Ergebnis der Division

Summanden.....Teile (Zahlen, Variable) zwischen dem „+“-zeichen

Minuend.....Die Zahl oder Variable, von der etwas abgezogen (subtrahiert) wird

also die Zahl oder Variable, die vor dem Minuszeichen steht

Subtrahend.... Die Zahl oder Variable, die abgezogen (subtrahiert) wird

also die Zahl oder Variable, die nach dem Minuszeichen steht

1.Faktor (Multiplikand)..... Die Zahl oder Variable mit der multipliziert wird

also die Zahl oder Variable, die links des Multiplikationszeichens steht

2.Faktor (Multiplikator)..... Die Zahl oder Variable, die multipliziert wird

also die Zahl oder Variable, die rechts des Multiplikationszeichens steht

Dividend..... Die Zahl oder Variable durch die dividiert wird

also die Zahl oder Variable, die links des Divisionszeichens steht

Divisor.... Die Zahl oder Variable durch die dividiert wird

also die Zahl oder Variable, die rechts des Divisionszeichens steht

Ergibt.....-> =..... ist gleich

Beachte , dass bei einer Gleichung immer ein linker Teil sowie ein rechter Teil auf Seiten des „= zeichens“ vorkommt.

Wir schreiben für eine Gleichung kurz:

$$T_1 = T_2$$

T_1 ist die linke Seite und bedeutet „**Term1**“

T_2 ist die rechte Seite und bedeutet „**Term2**“

Was „Term“ genau bedeutet, will ich im nächsten Leuchtturm erklären.

Wir merken uns für dieses Kapitel:

Term= eine oder mehrere Zahlen, dazu eine Variable, verbunden durch ein (oder mehrere) Rechenzeichen.



T1=T2

Was bedeutet jetzt aber „Lösen über der Grundmenge Q“???

Nun, die Lösung kann auch eine rationale Zahl (also ein Bruch ,eine Dezimalzahl oder natürlich auch eine *ganze Zahl* sein.->überlege: **diese ist ja auch eine rationale, weil die Menge der ganzen Zahlen eine Teilmenge der rationalen ist.(siehe Kapitel des Leuchtturms zu Zahlenmengen)**

Unsere Gleichungen sind so konzipiert, dass die Lösung meist nicht ganzzahlig ist. Dies hat den Vorteil, dass du auch das Bruchrechnen und Rechnen mit Dezimalzahlen wiederholst und übst.

Übersetzt in die mathematische Sprache lautet unser Musterbeispiel des ersten Blatts also:

$$8 \cdot x + 13 = 99$$

Nun bringen wir alle Zahlen auf eine Seite:

$$8 \cdot x + 13 = 99 \quad | -13 \quad \text{Äquivalenzumformung : „das Gegenteil auf der anderen Seite tun“}$$

„Was wir links tun, müssen wir auch rechts tun“

Denn eigentlich steht

$$8 \cdot x - 13 + 13 = 99 - 13 \quad \text{und } -13 + 13 = 0 \quad \text{also hebt sich auf der linken Seite weg!!!}$$

Das Gegenteil= die inverse Operation des Addierens ist das Subtrahieren

$$8 \cdot x = 99 - 13$$

$$8 \cdot x = 86 \quad | :8 \quad \text{Das Gegenteil= die inverse Operation des Multiplizierens ist das Dividieren}$$

$$x = \frac{86}{8} \quad \text{kürzen}$$

$$x = \frac{43}{4} = 10.75 \quad \text{Die Lösung ist also eine rationale Zahl- ein Bruch oder eine Kommazahl.}$$



Probe:

Wir setzen $x = \frac{43}{4} = 10.75$ in die Angabe ein

$$8 \cdot \frac{43}{4} + 13 = 99$$

Die Gleichung muss jetzt eine **w. A. (wahre Aussage)** ergeben. Dies bedeutet, links und rechts des „=- zeichens “ muss dieselbe Zahl stehen.

$$\frac{344}{4} + 13 = 99 \quad \rightarrow 86 + 13 = 99 \quad \rightarrow 99 = 99 \quad \text{w. A.}$$

w.A.Wiener Apfelstrudel (.....siehe Abbildung rechts!!!)

Wir haben also richtig gerechnet.



Beachte:

Die Äquivalenzumformungen sind nie eindeutig!!!!

Dies bedeutet, du kannst mit **verschiedenen Schritten zum selben Ergebnis** kommen!!!

Wir wollen dies veranschaulichen:

Beispiel:

Wir gehen aus von der Gleichung:

$$11 \cdot x + 17 = 69x - \frac{x}{6}$$

1. Möglichkeit:

$$11 \cdot x + 17 = 69x - \frac{x}{6} \quad | -11x$$

$$+17 = 58x - \frac{x}{6} \quad \text{usw.}$$



das Gegenteil von w. A. ist **f. A.** -> **falsche Aussage**

2. Möglichkeit:

$$11 \cdot x + 17 = 69x - \frac{x}{6} \quad | -69x$$

$$-58x + 17 = -\frac{x}{6}$$

3. Möglichkeit:

$$11 \cdot x + 17 = 69x - \frac{x}{6} \quad | \cdot 6 \quad \text{um den „lästigen“ Bruch wegzubekommen!!!!}$$

$$66 \cdot x + 102 = 414 \cdot x - x \quad \text{usw.}$$

4.Möglichkeit:

$$11 \cdot x + 17 = 69x - \frac{x}{6} \quad | -17$$

$$11 \cdot x = 69x - \frac{x}{6} - 17$$

Oder gleich rechts auf gemeinsamen Nenner bringen:

$$11 \cdot x + 17 = \frac{69 \cdot 6x}{6} - \frac{x}{6}$$

$$11 \cdot x + 17 = \frac{414x}{6} - \frac{x}{6} \quad 11 \cdot x + 17 = \frac{413x}{6} \quad | -11x = \frac{66x}{6}$$

...und alle Wege führen zur Lösung $x = \frac{102}{347}$

Beispiele mit „größer /kleiner als“**Musterbeispiel Nr.002:****entspricht Ü11***Das Fünffache einer Zahl ist um 9 kleiner als ein Siebtel der Zahl.**Wie lautet die Zahl???*„Übersetzung“ und Ansatz:

$$5x = \frac{x}{7} - 9 \quad | \cdot 7 \quad \text{um 9 kleiner} \rightarrow -9 \text{ wird rechts des „=“ geschrieben!!!}$$

also : 9 wird auf der **rechten Seite** subtrahiert!!!!

$$\text{Richtig wäre auch: } 5x + 9 = \frac{x}{7} \quad \text{oder} \quad 5x = -9 + \frac{x}{7}$$

$$35x = x - 63 \quad | -x$$

$$34x = -63 \quad | : 34 \rightarrow x = -\frac{63}{34}$$

Musterbsp. Nr.003:entspricht Ü15

Das Zwölfwache der um 33 verminderten Zahl ist um 91 kleiner als das der vierte Teil dieser Zahl. Wie lautet die Zahl???

Die um 33 verminderte Zahl..... $x - 33 = (x - 33)$ um die „Einheit“ dieser Zahl auszudrücken, setzen wir sie in Klammer.

Von dieser Zahl das Zwölfwache: $12 \cdot (x - 33)$

Es gilt natürlich das Verteilungsgesetz!!!! $12 \cdot (x - 33) = 12 \cdot x - 12 \cdot 33$

Deshalb müssen wir die Klammer unbedingt setzen!!!!

Also lautet unser Gleichungsansatz:

$$12 \cdot (x - 33) = \frac{x}{4} - 91$$

$$12x - 396 = \frac{x}{4} - 91 \quad | + 396$$

$$12x = \frac{x}{4} + 305 \quad | \cdot 4$$

$$48x = x + 1220 \quad | - x$$

$$47x = 1220 \quad | : 47 \rightarrow x = \frac{1220}{47} = 25,9547$$

