Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm **023**

=Übungskapitel

Herausheben gemeinsamer Faktoren Teil 1

Grundbegriffe

Erforderlicher Wissensstand *(->Stoffübersicht im Detail und know -how-Theorie ->siehe auch* ***Wissensleuchtturm*** *der UE-und 3.Kl.)*

Kenntnis des Begriffs der Potenz
Alle Potenzregeln und Potenzrechengesetze kennen
Ordnen und Zusammenfassen von Grundpotenzen (Multiplikation von Variablen oder Zahlen, die zu Potenzen führen)
Zusammenfassen einer Addition oder Subtraktion von Potenzen (mit gemischten Gliedern)
Regeln für das Multiplizieren und Dividieren von Potenzen gleicher Basis

Herausheben gemeinsamer Faktoren aus einem Term (Zahlen und Variable)

Ziel dieses Kapitels (dieses Übungsleuchtturms) ist:

Training für das Herausheben gemeinsamer Faktoren aus Termen
(Potenzen ; mehrgliedrige Terme,; zwei oder mehrere Variable vorkommend)

Alle Formeln, Erklärungen (ab S22) und Musterbeispiele (ab S9) zu diesem Übungsleuchtturm findest du wie gewohnt hier im Lösungsteil (ab S6) !! Die entsprechende Musterbeispielnummer ist bei den Beispielen angemerkt.

Lösungen findest du ab Seite 6
Beachte den Theorieteil (Wissen) ab Seite 22 !
Musterbeispiele ab Seite 9!

Herausheben

Lektoren des chaotischen Institute of Mathematics in Triangle Perpendicular Valley haben im Zuge eines Arbeitsauftrages 4 High-Tech-Kräne bestellt, als es hieß, es muss eine ganze Seite voll Aufgaben herausgehoben werden. Dieselben Verantwortlichen haben dann auf dieser Seite in völliger Unkenntnis über mathematische Regeln die Aufgaben zum Herausheben mit ihrem Können bewältigt.
Überprüfe nun ob sie die Aufgaben richtig gelöst haben! Lies vorher das Kästchen durch!

Arbeitsauftrag
Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

Dies bedeutet:

Beispiel 1:
$5x^3 - 5x^2 + 13 =$
es kann zwar $5x^2$ aus den beiden ersten Gliedern (Glied 1&2) herausgehoben werden, aber nicht aus dem 3.Glied,da ja hier nur eine Zahl,13, steht und in dieser 5 nicht (ohne Rest oder Dez-zahl) enthalten ist!!!!!
Wir schreiben also:
Es kann nicht herausgehoben werden. Nicht möglich.

Beispiel 2
$14x^2v + 7x^2 - 28x^3v =$
es kann zwar $7x^2v$ aus dem ersten und 3. Glied (Glied 1&3) herausgehoben werden, aber nicht aus dem 2.mittleren Glied, da in diesem kein v vorkommt!
Wir schreiben also:
Es kann nicht herausgehoben werden. Nicht möglich.

Ü1

Beispiele mit einer Variablen

1) $1000567x - 1000567y = 1000567 \cdot (x - y)$

1.1) $1000567x - 1000567 = 1000567 \cdot (x)$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.003**

2) $12a + 18b = 3 \cdot (\ 4a + 6b\ )$ **-> siehe Musterbeispiel Nr.001**

2.1) $5a + 25b + 35s - 45t = 5 \cdot (\ a + 5b + 7s - 9t)$

2.2) $5a + 25b + 33s - 45t = nicht\ \ möglich$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.002**

2.3) $5t + 25t + 55t - 45t = 5 \cdot (t + 5t + 11t - 9t) = 5 \cdot (8t) = 40t$

Beispiele mit einer Variablen und Potenzen

3) $25x^2 + 30x = 5 \cdot (\ 5x\ \ + 6\ )$

4) $36z + 72z^2 = 36z \cdot (\ 0 + 2z\ )$

4.1) $36z + 72z + z = z \cdot (36 + 72 + 1) = 109z$

5) $36 + 72z = 36 \cdot (\ 1 + 2z\ )$

6) $36z^3 + 72z = 36z^2 \cdot (\ 1z + 2\ )$

7) $36z^3 + 72z + 72 = 72 \cdot (\ z^3 + 2z + 1\ )$

8) $e^3 + e^2 + e = e^2 \cdot (\ e + e + 1\ )\ = e^2 \cdot (2e + 1)$

9) $e^3 + e^2 + 3 = nicht\ möglich$

10) $e^3 + e^2 + 3e = nicht\ möglich$

11) $8x^3 - 4x = 4x \cdot (\ 2x^2 - 1\ )$

12.) $15x^2 - 30x^3 = 15x^2 \cdot (1 - 2x\ )$

13.) $8x^3 - 4x^6 = 4x^2 \cdot (2 - x^3)$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.004**

14.) $17x^3 - 34x^5 = 17x^3 \cdot (1 - 2x^2)$

15.) $8a^4 + 16a^3 - 4a^2 = 4a^2 \cdot (2a^2 + 4a)$

16.) $8a \ \ + 16a^3 - 4a^2 = 4 \cdot (2a + 4a^3 - a^2)$

17.) $8a \ \ + 16a^3 - 4a^2 = 4a \cdot (- a \ \ + 2 + 4a^2)$

18.) $9x^5 - 3x^4 = 3x^4 \cdot (3x - x)$
18.1) $9x^5 - 5 + 3x^4 = 3x^4 \cdot (3x - 0 + x)$

19.) $12c^4 + 24c^3 + 6c^2 = 6c^2 \cdot (2c^2 + 4c + 1 \ \ )$

20.) $12c^4 + 7c^3 + 6c^2 = c^2 \cdot (12c^2 + 7c + 6 \ \ )$

21.) $h^4 + h^3 - h^2 - h + 9 = h \cdot (h^3 + h^2 - h - 1 + 9)$

Beispiele auch mit 2 Variablen und Potenzen

22.) $r^2 s^2 - r^3 s = r^2 s \cdot (s - r)$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.005**

23.) $26k^3 m - 13m^3 = 13 \cdot (2k^3 m - m^3)$

24.) $11p^4 t^3 - 22p^2 t^3 + 33p^3 t = 11p^2 t \cdot (p^2 t^2 + 3p - 2t^2)$

25.) $7f^6 + 21f^5 g - 28f^4 g^2 = 7f^3 \cdot (f^3 + 3f^2 g - 4fg^2)$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.006**

26.) $7f^6 + 21f^5 g - 28f^4 = 7f^4 \cdot (f^2 + 3fg - 4)$

27) $7f^6 + 21f^5 g = 7gf^5 \cdot (f \ \ + 3)$

28.) $16c^7 - 32c^5 + 12c^4 - 8c = 4c \cdot (4c^6 - 8c^4 + 3c^3 - 2)$

29.) $16c^7 - 32c^5 + 12c^4 = 4c^4 \cdot (4c^3 - 8c \ \ + 3)$

30.) $16c^7 - 32c^5 + 12c^4 - 13 = 4c^4 \cdot \left(4c^3 - 8c \quad + 3 - 13\right)$

31.) $16c^7 - 32c^5 + 12c^4 + 12 = 4 \cdot \left(4c^7 - 8c^5 + 3c^4 + 3\right)$

32.) $27m^6 + 33m^4 = 3m^3 \cdot \left(9m^2 + 11m\right)$

33.) $24e^3 f^2 g^5 + 48e^2 fg^6 + 96e^4 fg^7 = 24e^2 f \quad g^5 \cdot \left(4e^2 g^2 + ef + 2g\right)$

34.) $93z^6 y - 47x^4 y^2 + 25ux^3 = xzy \cdot \left(93z^5 - 47x^3 y - 25\right)$

<u>Herausheben von (-1): Hebe (-1) heraus!!!!</u>

35.) $-6d - 6e + 7f - 4g = (-1) \cdot (\ 6d + 6e - 7f + 4g \quad)$

36.) $3e^2 - 4e - 6 = (-1) \cdot 3e^2 + 4e + 6 \quad)$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.007**

37.) $6x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 29x - 16 \ (-1) \cdot (-6x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 29x + 16 \quad)$

Lösungen zum Herausheben

1) $1000567\,x - 1000567\,y = 1000567 \cdot (x - y)$

1.1) $\boxed{1000567\,x - 1000567 = 1000567 \cdot (x - 1)}$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.003**

2) $12a + 18b = \boxed{6 \cdot (\ 2a + 3b\ )}$ **->siehe Musterbeispiel Nr.001**

2.1) $5a + 25b + 35s - 45t = 5 \cdot (\ a + 5b + 7s - 9t)$

2.2) $5a + 25b + 33s - 45t = nicht\ \ möglich$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.002**

2.3) $5t + 25t + 55t - 45t = 5 \cdot (t + 5t + 11t - 9t) = 5 \cdot (8t) = 40t$

3) $25x^2 + 30x = \boxed{5x \cdot (\ 5x\ \ + 6\ )}$

4) $36z + 72z^2 = \boxed{36z \cdot (1 + 2z\ )}$

4.1) $36z + 72z + z = z \cdot (36 + 72 + 1) = 109z$

5) $36 + 72z = 36 \cdot (\,1 + 2z\ )$

6) $36z^3 + 72z = \boxed{36z \cdot (\,1z^2 + 2\ )}$

7) $36z^3 + 72z + 72 = \boxed{36 \cdot (\ z^3 + 2z + 2\ )}$

8) $e^3 + e^2 + e = \boxed{e \cdot (\ e^2 + e + 1\ )}$

9) $e^3 + e^2 + 3 = nicht\ möglich$

10) $e^3 + e^2 + 3e = \boxed{e \cdot (\ e^2 + e + 3\ )}$

11.) $8x^3 - 4x = 4x \cdot (\ 2x^2 - 1\ )$

12) $15x^2 - 30x^3 = 15x^2 \cdot (1 - 2x\ \ )$

13.) $8x^3 - 4x^6 = \boxed{4x^3 \cdot (2 - x^3)}$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.004**

14.) $17x^3 - 34x^5 = 17x^3 \cdot (1 - 2x^2)$

15.) $8a^4 + 16a^3 - 4a^2 = 4a^2 \cdot (2a^2 + 4a - 1)$

16.) $8a\ \ + 16a^3 - 4a^2 = \boxed{4a \cdot (2 + 4a^2 - a\ \ )}$

17.) $8a\ \ + 16a^3 - 4a^2 = 4a \cdot (-a\ \ + 2 + 4a^2)$
Es wurde nur die Reihenfolge der Glieder vertauscht

18.) $9x^5 - 3x^4 = \boxed{3x^4 \cdot (3x - 1)}$

18.1) $9x^5 - 5 + 3x^4 = nicht \quad möglich$

19.) $12c^4 + 24c^3 + 6c^2 = 6c^2 \cdot (2c^2 + 4c + 1\ \ )$

20.) $12c^4 + 7c^3 + 6c^2 = c^2 \cdot (12c^2 + 7c + 6\ \ )$

21.) $\boxed{h^4 + h^3 - h^2 - h + 9 = \quad nicht \quad möglich}$

22.) $r^3s^2 - r^2s = r^2s \cdot (s - r)$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.005**

23.) $26k^3m - 13m^3 = \boxed{13m \cdot (2k^3 - m^2)}$

24.) $11p^4t^3 - 22p^2t^3 + 33p^3t = 11p^2t \cdot (p^2t^2 + 3p - 2t^2)$

25) $7f^6 + 21f^5g - 28f^4g^2 = \boxed{7f^4 \cdot (f^2 + 3fg - 4g^2)}$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.006**

26.) $7f^6 + 21f^5g - 28f^4 = 7f^4 \cdot (f^2 + 3fg - 4)$

27.) $7f^6 + 21f^5g = \boxed{7f^5 \cdot (f\ \ + 3g)}$

28.) $16c^7 - 32c^5 + 12c^4 - 8c = 4c \cdot (4c^6 - 8c^4 + 3c^3 - 2)$

29.) $16c^7 - 32c^5 + 12c^4 = 4c^4 \cdot (4c^3 - 8c\ \ + 3)$

30.) $\boxed{16c^7 - 32c^5 + 12c^4 - 13 = nicht\ möglich}$

31.) $16c^7 - 32c^5 + 12c^4 + 12 = 4 \cdot (4c^7 - 8c^5 + 3c^4 + 3)$

32.) $27m^6 + 33m^4 = \boxed{3m^4 \cdot (9m^2 + 11)}$

33.) $24e^3 f^2 g^5 + 48e^2 fg^6 + 96e^4 fg^7 = 24e^2 f \quad g^5 \cdot (4e^2 g^2 + ef + 2g)$

34.) $\boxed{93z^6 y - 47x^4 y^2 + 25ux^3 = nicht \quad möglich}$

Herausheben von (-1): Hebe (-1) heraus!!!!

35.) $-6d - 6e + 7f - 4g = (-1) \cdot (\ 6d + 6e - 7f + 4g \ )$

36.) $3e^2 - 4e - 6 \boxed{= (-1) \cdot (-3e^2 + 4e + 6 \ )}$ **- >siehe Musterbeispiel Nr.007**

37.) $6x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 29x - 16 \ (-1) \cdot (-6x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 29x + 16 \ )$

Musterbeispiele

Musterbeispiel Nr.001 zu Ü1-2

Arbeitsauftrag
Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus.....☹ wenn möglich....

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$24b + 18m =$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den beiden Gliedern (Summanden) **->** vorkommen.
Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:
„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“ , das übrige bleibt in der Klammer“

Zu Beginn kannst du die Glieder in Faktoren (...mal...mal) noch zerlegen, damit du dir leichter tust, um zu sehen, welche Zahlen oder/und Variable gemeinsam vorkommen

$24b + 18m = 6 \cdot 4 \cdot b + 6 \cdot 3 \cdot b$

noch genauer-im Sinne der Primfaktorenzerlegung

$24b + 18m = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot b + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b$

Wir sehen: Nur der 6-er (2-mal 3 im Sinne von obiger Überlegung) ist in **beiden Gliedern gemeinsam** enthalten, die Variable nicht, da im 1.Glied nur b vorkommt, im 2.Glied nur m!!!
Wir schreiben daher den **6-er einmal multipliziert vor die Klammer**

Herausheben eines gemeinsamen Faktors: hier in unserem Beispiel:
„das was gemeinsam ist,(in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten): 6 wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“ , das übrige $(4 \cdot b + 3 \cdot m)$ bleibt in der Klammer“

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$$\boxed{24b + 18m = 6 \cdot 4 \cdot b + 6 \cdot 3 \cdot b = 6 \bullet (4 \cdot b + 3 \cdot m)}$$

Mehr kann nicht mehr herausgehoben werden.

In der Angabe steht:
Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus

$$24b+18m=2\cdot3\cdot4\cdot b+2\cdot3\cdot3\cdot b=2\cdot(3\cdot4b+3\cdot3m)=2\cdot(12+9m)$$

Wir haben zwar auch das Gemeinsame **((nur)etwas Gemeinsames)** herausgehoben, aber nicht **soweit als möglich**

Die Rechnung ist noch nicht im Sinne des Heraushebens korrekt, also nicht fertig!!!!

Schließlich kommt ja in der Klammer noch der 3er in beiden Gliedern gemeinsam vor.

$$24b+18m=2\cdot3\cdot4\cdot b+2\cdot3\cdot3\cdot b=3\cdot(2\cdot4b+2\cdot3m)=3\cdot(8b+6m)$$

Auch hier haben wir zwar das Gemeinsame **((nur)etwas Gemeinsames)** herausgehoben, aber nicht **soweit als möglich**

Die Rechnung ist noch nicht im Sinne des Heraushebens korrekt, also nicht fertig!!!!

Schließlich kommt ja in der Klammer noch der 2er in beiden Gliedern gemeinsam vor.

Ein kleiner Tip:

Zeichne dir ruhig einen Kran auf und hänge an seinen Haken das Gemeinsame der Glieder, das vor der Klammer steht. Ich habe dies auch in der Stunde in einer Übergangsklasse an die Tafel gezeichnet.

Musterbeispiel Nr.002 zu Ü1-2.2

Arbeitsauftrag
Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$3i + 6f + 31s - 18k =$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in **allen 4 Gliedern** (Summanden) vorkommen.
Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:
„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal" , das übrige bleibt in der Klammer"

Zahlen
Es kommt zwar der 3er im 1., 2. und 4.Glied gemeinsam vor, jedoch **nicht im 3.Glied** 31.

Daher können wir ihn **nicht herausheben**, er muss **in allen Gliedern gemeinsam vorkommen!!!!**

Variable
kommt überhaupt keine gemeinsam vor. Diese können wir daher sowieso nicht herausheben.

Wir schreiben also:
Es kann nicht herausgehoben werden. Nicht möglich.

siehe auch Beispiel 1 und 2 der Angabe am header!

Musterbeispiel Nr.003 zu Ü1-1.1

Arbeitsauftrag
Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$78567w - 78567$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den beiden Gliedern (Summanden) vorkommen.
Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:
„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“ , das übrige bleibt in der Klammer“

78567 kommt in beiden Gliedern vor. Wir heben es heraus.

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$\boxed{78567w - 78567 = 78567 \bullet (w-1)}$

Achtung!!!! Tritt nur eine Zahl alleine in einem Glied auf und ist diese **vollständig heraushebbar, dann müssen wir unbedingt 1 in die Klammer an ihrer Stelle setzen!!!!**

Denn $78567 \bullet 1 = 78567$ wenn wir die Probe machen durch Ausmultiplizieren im Sinne des Verteilungsgesetzes.

$\boxed{Zahl \bullet 1 = Zahl}$

Falsch ist: (leider wurde dieser Fehler häufig bei den SchülerInnen gemacht)

$\boxed{78567w - 78567 = 78567 \bullet (w-0)}$ **falsch**

$\boxed{78567w - 78567 = 78567 \bullet (w)}$ **falsch**

Bist du dir unsicher, mache stets die Pobe nach dem Verteilungsgestz!

Musterbeispiel Nr.004 zu Ü1 - 13

Arbeitsauftrag
Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$27x^5 - 18x^8 =$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den beiden Gliedern **in Potenz auftretend gemeinsam** vorkommen
Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:
„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“ , das übrige bleibt in der Klammer“

Zahlen
Schnellchecker:
Ohne dass wir eine Primfaktorenzerlegung durchführen, sehen wir, dass der 9er (3 mal 3)in beiden Gliedern vorkommt. Im 1.Glied bleiben uns ein 3-er, im 2. Glied ein 2-er übrig

Zahlen und Variable- genaue Untersuchung:
Bei höheren Zahlen und Potenzen ist eine genaue Zerlegung der Faktoren in den beiden (oder mehreren) Gliedern vorteilhaft und gut:

$$27x^5 - 18x^8 = = 3\cdot 3\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x - 2\cdot 3\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$$

Wir unterstreichen oder markieren die gemeinsamen Faktoren (sowohl Zahlen als auch Variable) färbig (hier haben wir sie mit einer geschwungenen Unterklammer und der Bemerkung „gemeinsam“ notiert)

$$27x^5 - 18x^8 = 3\cdot \underbrace{3\cdot 3}_{gemeinsame\ Zahlen} \cdot \underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}_{gemeinsame\ Variable} - 2\cdot \underbrace{3\cdot 3}_{gemeinsame\ Zahlen} \cdot \underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}_{gemeinsame\ Variable} \cdot x\cdot x\cdot x$$

Um später die Potenz nicht in einzelne Faktoren (mal...mal...) zerlegen zu müssen, wenn du den gemeinsamen Faktor zum Herausheben (in Potenz) bestimmst-

etwa $x \cdot x \cdot x = x^3$

„misst" du/ schaust du, wie oft eine Potenz in einer anderen enthalten ist „wie viel mal Basis hoch .... ist gleich selbe Basis hoch ....*"-> siehe Merkkasten auf der nächsten Seite!*

1.)Vor die Klammer mit Multiplikationszeichen wird geschrieben:

Diese Faktoren sind oben in der Zerlegung in den Gliedern mit Unterklammer markiert – (Zahl oder/und Variable) (du arbeitest statt der Unterklammer mit Unterstreichen in Farbe...)

Zahl:

$\underbrace{3 \cdot 3}_{gemeinsame\ Zahlen}$ wird herausgehoben

Variable

In beiden Gliedern gemeinsam kommt $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{gemeinsame\ Variable} = x^5$ vor.

Nicht mehr, keine höhere Potenz!

Daher wird $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{gemeinsame\ Variable} = x^5$ herausgehoben (vor die Klammer multipliziert geschrieben)

2.) In die Klammer kommen:

Diese Faktoren bleiben oben in der Zerlegung in den Gliedern nicht markiert ohne Unterklammer stehen du arbeitest mit Unterstreichen in Farbe..)

Zahl:

1.Glied

Zahl 3 Diese müssen **wir in die Klammer** schreiben.

2.Glied

Zahl 2

Variable:

2.Glied

$x \cdot x \cdot x = x^3$ Diese müssen wir in die Klammer schreiben.

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$\boxed{27x^5 - 18x^8 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (3 - 2 \cdot x \cdot x \cdot x)}$

$\boxed{27x^5 - 18x^8 = 9x^5 \cdot (3 - 2x^3)}$

Merke:

„Misst“ du/ schaust du, wie oft eine Potenz in einer anderen enthalten ist,
„wie viel mal Basis hoch …. ist gleich selbe Basis hoch ….“
wie oft mal Basis x hoch a ist gleich selbe Basis x hoch b
also z.B. $x^4 \bullet ? = x^6$ (siehe unten genauer) -stellst du folgende Überlegungen an:

Beispiel:
Hebe soweit als möglich heraus:
$x^6 - x^8 =$

Die niedrigere Potenz ist auf jeden Fall in der höheren logischerweise enthalten.
Wenn du dann wissen willst, was im anderen Glied mit der höheren Potenz in der Angabe in der Klammer stehen bleibt, merke dir: Du **subtrahierst** (minus rechnen) die **niedrigere von der höheren.**
Hier: 8-6=2
Daher bleibt im 2.Glied in der Klammer x^2 übrig.

$$x^6 - x^8 = x^6 \cdot \left(1 - x^2\right)$$

Ganz genau mathematisch überlegst du dir im Geiste (und dann bei der Probe oder auch gleich):

$$x^6 \bullet ? = x^8$$

$$x^6 \bullet x^2 = x^8$$

weil die Hochzahlen bei der Multiplikation von Potenzen *gleicher Basis* **addiert** werden:

$$x^{6+2} = x^8$$

In unserem Ü4:

$x^5 \bullet ? x^8$ 8-5=3

$x^5 \bullet x^3 = x^8$
weil $x^{5+3} = x^8$

Musterbeispiel Nr.005 zu Ü1 - 22

Arbeitsauftrag
Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$$r^3s^2 - r^2s =$$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den beiden Gliedern **in Potenz auftretend gemeinsam** vorkommen.
Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:
„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“, das übrige bleibt in der Klammer“

Zahlen
kommen keine vor.

Variable
Es kommen nun 2 Variable vor. Wir müssen also r und s und deren Potenz (Hochzahl) (getrennt) betrachten.
Zahlen und Variable- genaue Untersuchung:
Bei höheren Zahlen und vor allem Potenzen ist (zu Beginn) eine genaue Zerlegung der Faktoren in den beiden (oder mehreren) Gliedern vorteilhaft und gut. Später wirst du die Zerlegung mit Übung nicht mehr brauchen.

$$r^3s^2 - r^2s = = r \cdot r \cdot r \cdot s \cdot s - r \cdot r \cdot s$$

Wir unterstreichen oder markieren die gemeinsamen Faktoren (sowohl Zahlen als auch Variable) färbig (hier haben wir sie mit einer geschwungenen Unterklammer und der Bemerkung „gemeinsam“ notiert)

$$r^3s^2 - r^2s = \underbrace{r \cdot r}_{gemeinsam} \cdot r \cdot \underbrace{s}_{gemeinsam} \cdot s - \underbrace{r \cdot r}_{gemeinsam} \cdot \underbrace{s}_{gemeinsam}$$

$$r^3 s^2 - r^2 s = \underbrace{r \cdot r}_{gemeinsam} \cdot r \cdot \underbrace{s}_{gemeinsam} \cdot s - \underbrace{r \cdot r}_{gemeinsam} \cdot \underbrace{s}_{gemeinsam}$$

1.)Vor die Klammer mit Multiplikationszeichen wird geschrieben:
Diese Faktoren sind oben in der Zerlegung in den Gliedern mit Unterklammer markiert – (Zahl oder/und Variable) : (du arbeitest statt der Unterklammer mit Unterstreichen in Farbe...)

Zahl:

Variable
Jetzt liegen 2 verschiedene Variable vor.

Variable r :

In beiden Gliedern gemeinsam kommt $r \cdot r = r^2$ vor. Nicht mehr, keine höhere Potenz!
Variable s :
In beiden Gliedern gemeinsam kommt nur s vor. Nicht mehr, keine höhere Potenz!

Daher wird $r \cdot r \cdot s$ herausgehoben (vor die Klammer multipliziert geschrieben)

2.) In die Klammer kommen:
Diese Faktoren bleiben oben in der Zerlegung in den Gliedern nicht markiert ohne Unterklammer stehen : (du arbeitest mit Unterstreichen in Farbe...)

Zahl: kommt keine vor

Variable:
1.Glied
Im 1.Glied bleibt uns dann in der **Klammer** nur $r \cdot s$ übrig.

2.Glied

Im 2.Glied bleiben uns kein r oder s übrig! Wir müssen 1 in die **Klammer** schreiben.

Siehe Musterbeispiel Nr.003:
Achtung!!!! Tritt nur eine Zahl alleine in einem Glied auf und ist diese **vollständig heraushebbar**, dann müssen wir unbedingt 1 in die Klammer an ihrer Stelle setzen!!!

$$r^3 s^2 - r^2 s = r \cdot r \cdot s \bullet (r \cdot s - 1)$$

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$$\boxed{r^3 s^2 - r^2 s = r^2 \cdot s \bullet (r \cdot s - 1)}$$

Musterbeispiel Nr.006 zu Ü1 - 25

Arbeitsauftrag
Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus.....☹ wenn möglich....

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$44g^8 + 24g^6k - 96g^4k^2 =$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den 3 Gliedern **in Potenz auftretend gemeinsam** vorkommen.
Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:
„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal", das übrige bleibt in der Klammer"

Zahlen
Nach der Primfaktorenzerlegung (siehe Übungschili Nr.004 und Wissenschili der 2.Klasse)
Natürlich kannst du auch in TI nspire mit dem factor-Befehl arbeiten!!
$44 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \qquad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Variable
Es kommen nun 2 Variable vor. Wir müssen also g und k und deren Potenz (Hochzahl) (getrennt) betrachten.
Zahlen und Variable- genaue Untersuchung:
Bei höheren Zahlen und vor allem Potenzen ist (zu Beginn) eine genaue Zerlegung der Faktoren in den beiden (oder mehreren) Gliedern vorteilhaft und gut. Später wirst du die Zerlegung mit Übung nicht mehr brauchen.

$$44g^8 + 24g^6k - 96g^4k^2 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot k -$$
$$- 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot k \cdot k$$

Wir unterstreichen oder markieren die gemeinsamen Faktoren (sowohl Zahlen als auch Variable) färbig (hier haben wir sie mit einer geschwungenen Unterklammer und der Bemerkung „gemeinsam" notiert)

$$44g^8 + 24g^6k - 96g^4k^2 =$$

$$= \underbrace{2 \cdot 2}_{gemeinsame\ Zahlen} \cdot 11 \cdot \underbrace{g \cdot g \cdot g \cdot g}_{gemeinsame\ Variable} \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g +$$

$$+ \underbrace{2 \cdot 2}_{gemeinsame\ Zahlen} 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{g \cdot g \cdot g \cdot g}_{gemeinsame\ Variable} \cdot g \cdot g \cdot k -$$

$$- \underbrace{2 \cdot 2}_{gemeinsame\ Zahlen} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{g \cdot g \cdot g \cdot g}_{gemeinsame\ Variable} \cdot k \cdot k$$

1.)Vor die Klammer mit Multiplikationszeichen wird geschrieben:
Diese Faktoren sind oben in der Zerlegung in den Gliedern mit Unterklammer markiert – (Zahl oder/und Variable) : (du arbeitest statt der Unterklammer mit Unterstreichen in Farbe...)

Zahl: $\underbrace{2 \cdot 2}_{gemeinsame\ Zahlen}$

Variable
Jetzt liegen 2 verschiedene Variable vor.

Variable g:
In allen 3 Gliedern gemeinsam kommt $\underbrace{g \cdot g \cdot g \cdot g}_{gemeinsame\ Variable}$ vor. Nicht mehr, keine höhere Potenz!

Variable k:

k kommt nur im 2.und 3.Glied gemeinsam vor, kann daher nicht herausgehoben werden.

2.) In die Klammer kommen:
Diese Faktoren bleiben oben in der Zerlegung in den Gliedern nicht markiert ohne Unterklammer stehen: (du arbeitest mit Unterstreichen in Farbe...)

Zahl:
1.Glied : 11
2.Glied $2 \cdot 3$
3.Glied $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Variable:

1.Glied

Im 1.Glied bleibt uns dann in der **Klammer** $g \cdot g \cdot g \cdot g$ übrig.

2.Glied

Im 2.Glied bleibt uns $g \cdot g \cdot k$ übrig! Wir müssen $g \cdot g \cdot k$ in die **Klammer** schreiben.

3.Glied

Im 3.Glied bleibt uns $k \cdot k$ übrig! Wir müssen $k \cdot k$ in die **Klammer** schreiben.

$$44g^8 + 24g^6k - 96g^4k^2 = 2 \cdot 2 \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \bullet (11 \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g + 2 \cdot 3 \cdot g \cdot g \cdot k - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k \cdot k)$$

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$$\boxed{44g^8 + 24g^6k - 96g^4k^2 = 4g^4 \bullet (11g^4 + 6g^2k - 24k^2)}$$

Musterbeispiel Nr.007 **zu Ü1 – 36**

Hebe (-1) heraus:

$14v^2 - 6v - 10v^3 =$

Heben wir (-1) heraus, **ändern wir einfach alle Vorzeichen** (auch das erste vor dem 1.Glied nicht vergessen!!!!) und schreiben die mit Vorzeichen geänderte Angabe in die Klammer. Fix herausgehoben vor der Klammer ist immer (-1)

$$\boxed{14v^2 - 6v - 10v^3 = (-1) \bullet (-14v^2 + 6v + 10v^3)}$$

Überlege als Probe:

Multiplizierst du (-1) mit allen Gliedern aus, ändern sich (wieder) alle Vorzeichen.
Minus mal Minus ergibt Plus.
Plus mal Minus ergibt Minus.

Theorie:

Merkregel für das Herausheben:

-> Siehe auch Musterbeispiele vorher!!!

Strukturmerkformel des Heraushebens:

$$Gemeinsame\ Faktoren - in\ allen\ Gliedern\ vorkommend \bullet \begin{pmatrix} Übriggebliebene\ NICHT\ \ färbig\ unterstrichene \\ /\ hier\ NICHT mit\ Unterklammernotierte Glieder \\ mit\ +,- \quad also\ in\ Summe\ oder\ Differenz \end{pmatrix}$$
$$\uparrow\Uparrow\uparrow\ EINMAL\ VOR\ die\ (\quad)geschrieben - färbig\ unterstrichen\ /\ hier\ mit\ geschwungener Unterklammer$$
$$notiert\ - in\ allen\ Gliedern\ (Zahlen\ und\ /\ oder Variable) -> EINMAL\ VOR\ die\ (\quad)geschrieben$$

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:
„das was gemeinsam ist, (in <u>beiden/allen</u> Gliedern zwischen minus und plus enthalten), <u>wird 1mal</u> vor die Klammer gesetzt mit „mal", das übrige bleibt in der Klammer"

*Herausheben ist die **Umkehr des Distributivgesetzes**:*

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \quad Distributivgesetz \Updownarrow\Leftrightarrow$$
$$a\cdot c + b\cdot c = (a+b)\cdot c \quad Herausheben \Updownarrow$$

In der 1.Klasse haben wir bereits das Herausheben im Zuge des Verteilungsgesetzes kennengelernt:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors

Herausheben ist die Umkehr des Distributivgesetzes

Bsp: $67 \cdot (\ 1300 + 87\ ) = 67 \cdot 1300 + 67 \cdot 87 =$ **DG**

$= 67 \cdot 1300 + 67 \cdot 87 = 67 \cdot (\ 1300 + 87\ )$ **Herausheben**

67 wurde herausgehoben, weil 67 in beiden Produkten zwischen dem + gemeinsam vorkommt!!!

Merksatz: „das was gemeinsam ist, wird ***einmal*** vor die Klammer multiplizierend angeschrieben.
Der Rest bleibt/kommt in der/die Klammer"

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$

einfach das Verteilungsgesetz von rechts nach links gelesen…..

Wichtig: Kurz zum Merken:

Mache die Probe, indem du das Verteilungsgesetz (Das vor der Klammer stehende Glied mit **jedem einzelnen Glied** in der Klammer aus-multiplizieren) anwendest!!

Vergiss nicht: wird „alles herausgehoben " aus einem Glied, so bleibt **1 und nicht 0** in der Klammer über!!!

Bsp.: $4x^3 + 8x^4 = 4x^3 \cdot (1 + 2x)$

wird der Einser nicht dazugeschrieben, **so ist es falsch**!!!
Mache die Probe, indem du das Verteilungsgesetz anwendest –dann hast du den Beweis

Unterscheide:

Ü $39u+21v=3\cdot(13u+7v)\rightarrow \textit{nur eine Zahl wird herausgehoben}$

$39u^2+21v^2=3\cdot(13u^2+7v^2)\rightarrow \textit{nur eine Zahl wird herausgehoben}$

Ü $39uv+21v=3v\cdot(13u+7)\rightarrow \textit{Zahl und Variable wird herausgehoben}$

$39u^2v+21v^2=3v\cdot(13u^2+7v)\rightarrow \textit{Zahl und Variable wird herausgehoben}$

$39u^4v^3+21v^2=3v^2\cdot(13u^4v+7)\rightarrow \textit{Zahl und Variable(Potenz) wird herausgehoben}$

Ü $8uv+9v=v\cdot(8u+9)\rightarrow \textit{nur eine Variable wird herausgehoben}$

$8uv^2+9v^3=v^2\cdot(8u+9v)\rightarrow \textit{nur eine Variable(Potenz) wird herausgehoben}$

$8uv^2+9v^2=v^2\cdot(8u+9)\rightarrow \textit{nur eine Variable(Potenz) wird herausgehoben}$

Überall wurde korrekt herausgehoben, weil soweit als möglich herausgehoben wurde!!!

Wozu herausheben????

Herausheben ist oft sehr notwendig und praktisch-etwa in Bruchtermen, um dann besser kürzen zu können.
Aber auch in der Oberstufe dient es zur Erleichterung von Rechengängen-etwa in der Differentialrechnung (7.Klasse),um Ansatzfunktionen zu vereinfachen.