Rechnen mit gebrochen rationalen Exponenten-die Wurzel

Potenzen und Wurzeln- Teil 1

Kompetenzen und Standards 6.Klasse

1.)

Ergänze:

Die n-te Wurzel aus einer nicht-negativen Zahl a ist jene nicht-negative Zahl b

……..

2.)

Schreibe allgemein die n-te Wurzel aus einer nicht-negativen Zahl a an

und gib die genauen **Bezeichnungen (Namen der Definitionen) für a, b und n an.**

3.)

Ergänze:

Das Potenzieren ist die …… des Wurzelziehens.

4.)

Inwiefern hängt der Begriff **der Wurzel überhaupt mit dem Begriff der Potenz** und damit mit dem Begriff ***der Hochzahl*** zusammen? **Anleitung:** *Die Wurzel ist als Potenz umzuschreiben*

Erkläre und gib eine Formel an.

5.) Wie gibst du $\sqrt[3]{7}$ in den **Taschenrechner** (neuestes Modell TI 30X-A… und pro) ein??

6.) Ergänze, erkläre diese beiden Formeln in Worten und gib ein Beispiel an.

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = ...$ $\qquad\qquad$ $\sqrt[n]{a^n} = ...$

Was ergibt $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n$?

7.)
Gib an, ob die Behauptungen zur folgenden Formel **richtig sind**:
Kreuze richtige Behauptungen an!

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

5-1) Die Voraussetzung der Formel *ist, dass n eine ganze Zahl ist*
5-2) a darf auch 0 sein.

5-3) m kann keine negative ganze Zahl sein.
5-4) m kann auch 0 sein.

*Gib zu dieser Formel ein Zahlenbeispiel der Hochzahl mit einer **negativen** **rationalen Zahl** an und schreibe den Ausdruck mittels Wurzel an!*

8.)
Um Potenzen mit gebrochen rationalen Exponenten (gleiche oder ungleiche Basis; verschiedener /gleicher Exponent)) **multiplizieren oder dividieren** zu können, und dann als Wurzeln umzuschreiben, greifen wir auf Rechenregeln mit Potenzen zurück. Welche sind dies? Gib die Formeln an und erkläre in Worten.
Rechnen mit Wurzeln durch Umschreiben in eine Potenz deren Hochzahlen Brüche sind

Zeige für die Multipliaktion: Hinweis:

1.) gleiche Basis-verschied.Expo: Bsp: $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{2}{5}}$

2.) ungleiche Basis-gleiche Expo: Bsp $x^{-\frac{2}{5}} \cdot y^{-\frac{2}{5}}$

Handelt es sich bei den beiden Angaben um Wurzeln? (siehe auch 4.))

Zeige nun selbst für die Division anhand eines Beispiels.

9.)
Rechnen mit Wurzeln durch Umschreiben in eine Potenz deren Hochzahlen Brüche sind

Rechnen mit gebrochen rationalen Exponenten
Basis gleich bzw.Hochzahlen gleich
Multiplikation und Division

Berechne zunächst/soweit als möglich ohne Taschenrechner, stelle das Ergebnis in der Form einer Potenz a^r und dann in Wurzelschreibweise dar, rechne am Ende dann-wo möglich- mit dem TR aus!!

Gib dann nach Berechnung an, ob es sich um eine **wahre oder falsche** Aussage handelt.
(stelle falsche Aussagen richtig)

1.) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \quad \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

2.) $\left(x^{-\frac{1}{9}}\right)^3 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}$

3.) $8^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \quad 4$

4.) $\sqrt{y} : y^{-\frac{2}{3}} = \quad \sqrt[3]{y^7}$

5.) $0.008 \cdot 0.2^{-\frac{7}{3}} = \quad \sqrt[3]{0{,}04} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}} = 0{,}341995189$

6.) $14^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{6}} = \quad \sqrt[6]{\frac{2}{7}} = 0{,}81156254$

7.) $6^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \quad \sqrt[3]{\frac{3}{8}}$

8.) $y^{-\frac{2}{3}} : \sqrt{y} = y^{-\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{y^{-7}}$

9.) $(2z)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \quad 2$

10.) $\left(x^2 - 1.5y\right) \cdot x^{1,5} = \quad \left(x^2 - 1{,}5y\right) \cdot \sqrt{x^3}$

11.) $2 \cdot (x-y)^{-\frac{2}{3}} = \quad \frac{2}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$

12.) $(a+b) \cdot \sqrt[7]{\left(x^2 - y\right)^5} = \quad (a+b)^7 \left(x^2 - y\right)^{\frac{5}{7}}$

13.) $\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} = \quad 4x^{-\frac{2}{3}}$

14.) $0.04^{-\frac{1}{2}} \cdot 0.2^3 = \quad 0{,}4^2$

15.) $5^{\frac{1}{2}} : 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{5} = 1{,}30766$

16.) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \quad \sqrt[3]{4}$

17.) $\left(8^{-\frac{1}{3}}\right)^0 = 1$

18.) $\left(3^{-0,5}\right)^2 = \quad \frac{1}{3}$

19.) $\left(7^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}} = 49$

20.) $\left(0.2^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} = \quad 25$

21.) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{1}{2}} = \quad \frac{1}{9}$

22.) $63^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \quad \sqrt{\frac{441}{4}} = \frac{21}{2} = 10.5$

23.) $\left(\frac{x^3}{27}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \quad \sqrt[4]{\frac{x^4}{3^4}} = \frac{x}{3}$

24.) $\left(\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(16x^2\right)^{\frac{1}{6}} = \quad \sqrt{5^6}$

Lösungen

1.)
Ergänze:
Die n-te Wurzel aus einer nicht-negativen Zahl a ist jene nicht-negative Zahl b,
deren n-te Potenz a ist.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \qquad a,b \in R_0^+ \quad n \in N$$

2.)
Schreibe die n-te Wurzel aus einer nicht-negativen Zahl a an
und gib die genauen **Bezeichnungen (Namen) für a, b und n an.**

$$\sqrt[n]{a} \qquad a.....Radikand \quad a \in R_0^+ \quad n.....Wurzel\ \text{exp}\ onent \quad n \in N$$

3.)
Ergänze:
Das Potenzieren ist die **Umkehroperation** des Wurzelziehens.

4.)
Inwiefern hängt der Begriff der Wurzel überhaupt mit dem Begriff der Potenz und damit mit dem Begriff der Hochzahl zusammen? Erkläre und gib eine Formel an.

Jede Wurzel kann als Potenz mit einem gebrochen rationalen Exponenten (Radikand als Basis) geschrieben werden. (Wurzel in Form einer Hochzahl) „Wurzel als Potenz“

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$a \in R_0^+ \quad n \in N\ ohne\ 0 \quad m \in Z$

5.) Wie gibst du $\sqrt[3]{7}$ in den **Taschenrechner (** TI 30X-A und pro) ein??

3	2nd	$\sqrt[x]{}$	7	Doppelpfeil enter	= 1,912931183

6.) Ergänze, erkläre diese beiden Formeln in Worten und gib ein Beispiel an.

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ Hochzahl „hebt sich mit Wurzelexponent weg „
Wurzelziehen und dann Potenzieren hebt sich auf

$\sqrt[n]{a^n} = a$

Hochzahl der Potenz des Radikanden und Wurzelexponent heben sich weg
Potenzieren und dann Wurzelziehen hebt sich auf

Bsp: $\left(\sqrt[3]{6}\right)^3 = 6$ $\sqrt[4]{f^4} = f$

$\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n = a^n$

7.)
Gib an, ob die Behauptungen zur folgenden Formel **richtig sind**:
Kreuze richtige Behauptungen an!

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

5-1) Die Voraussetzung der Formel *ist, dass n eine ganze Zahl ist*
falsch-eine natürliche ohne 0

5-2) a darf auch 0 sein. ***X richtig*** $a \in R_0^+$

5-3) m kann keine negative ganze Zahl sein. falsch- auch negative! $m \in Z$

5-4) m kann auch 0 sein. ***X richtig*** $m \in Z$

Gib zu dieser Formel ein Zahlenbeispiel der Hochzahl mit einer negativen rationalen Zahl an und schreibe den Ausdruck mittels Wurzel an!

Bsp.:

$$z^{-\frac{5}{8}} = \frac{1}{z^{\frac{5}{8}}} = \frac{1}{\sqrt[8]{z^5}}$$

8.)
Um Potenzen mit gebrochen rationalen Exponenten (gleiche oder ungleiche Basis; verschiedener /gleicher Exponent) multiplizieren oder dividieren zu können, und dann als Wurzeln umzuschreiben,greifen wir auf Rechenregeln mit Potenzen zurück. Welche sind dies? Gib die Formeln an und erkläre in Worten.

1.)

$$x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{4}+-\frac{2}{5}} = x^{-\frac{3}{20}} = \frac{1}{.....}$$

2 Potenzen gleicher Basis werden **multipliziert**, indem die **Exponenten addiert** werden

$$\boxed{a^k \cdot a^m = a^{k+m}}$$

Division:

2 Potenzen **gleicher Basis** werden dividiert, indem die **Exponenten subtrahiert** werden $\boxed{\frac{a^k}{a^m} = a^{k-m}}$

2.) $x^{-\frac{2}{5}} \cdot y^{-\frac{2}{5}} = (x \cdot y)^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{(\ )^{\frac{2}{5}}}$

Ein Produkt wird ***potenziert***, indem ***jeder einzelne Faktor*** **potenziert** wird $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Division: Ein Quotient wird potenziert, indem ***Zähler und Nenner*** **potenziert** werden.

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Handelt es sich bei den beiden Angaben um Wurzeln? (siehe auch 4.))

ja,claro!!

$x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$ $\qquad$ $x^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}$ *später* -Rechenregeln für Wurzeln!!! etc.

9.)

Falsche Aussagen sind eingerahmt und bereits richtiggestellt!!!!
Wahre Aussagen (Richtiges) bleiben unverändert stehen.

1.) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \quad \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

2.) $\left(x^{-\frac{1}{9}}\right)^3 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}}$

3.) $8^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \quad 4$

4.) $\sqrt{y} : y^{-\frac{2}{3}} = \quad \boxed{\sqrt[6]{y^7}}$

5.) $0.008 \cdot 0.2^{-\frac{7}{3}} = \quad \sqrt[3]{0{,}04} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}} = 0{,}341995189$

6.) $14^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{6}} = \quad \sqrt[6]{\frac{2}{7}} = 0{,}81156254$

7.) $6^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \quad \boxed{\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0{,}908560296}$

8.) $y^{-\frac{2}{3}} : \sqrt{y} = \boxed{y^{-\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{y^{-7}}}$

9.) $(2z)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \quad 2$

10.) $\left(x^2 - 1.5y\right) \cdot x^{1,5} = \quad \left(x^2 - 1{,}5y\right) \cdot \sqrt{x^3}$

11.) $2 \cdot (x-y)^{-\frac{2}{3}} = \quad \frac{2}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$

12.) $(a+b) \cdot \sqrt[7]{\left(x^2 - y\right)^5} = \quad \boxed{(a+b)\left(x^2 - y\right)^{\frac{5}{7}}}$

13.) $\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} = \quad 4x^{-\frac{2}{3}}$

14.) $0.04^{-\frac{1}{2}} \cdot 0.2^3 = \quad \boxed{0{,}2^2}$

15.) $5^{\frac{1}{2}} : 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{5} = 1{,}30766$

16.) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \quad \boxed{\sqrt[3]{2} = 1{,}25992105}$

17.) $\left(8^{-\frac{1}{3}}\right)^0 = \quad 1$

18.) $\left(3^{-0,5}\right)^2 = \quad \frac{1}{3}$

19.) $\left(7^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}} = 49$

20.) $\left(0.2^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} = \quad 25$

21.) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{1}{2}} = \quad \boxed{\frac{1}{6}}$

22.) $63^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \quad \sqrt{\frac{441}{4}} = \frac{21}{2} = 10.5$

23.) $\left(\frac{x^3}{27}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \quad \sqrt[4]{\frac{x^4}{3^4}} = \frac{x}{3}$

24.) $\left(\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(16x^2\right)^{\frac{1}{6}} = \quad \boxed{\sqrt{5} = 2{,}236067978}$