

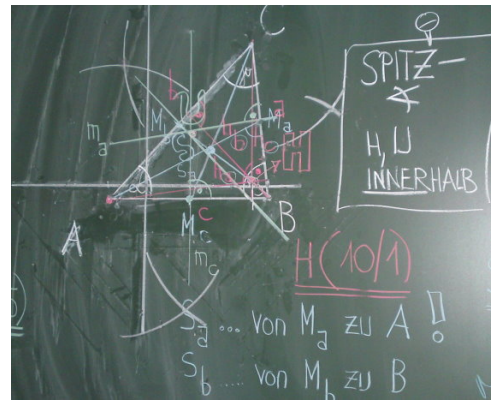
**Mathe Leuchtturm**

**Übungsleuchtturm**

**007**

=Übungskapitel

**Geometrie!**



## Die besonderen sonderbaren Punkte im Dreieck

**H,S,U und I im erweiterten Koordinatensystem**

### **Teil 1**

**Erforderlicher Wissensstand** (->Stoffübersicht im Detail siehe auch **Wissensleuchtturm** der UE-und 3.Kl.)

**Kenntnis des erweiterten Koordinatensystems mit negativen Achsen-„Koordinatenkreuz“**

**negative und positive Koordinaten; Begriff der Quadranten;**

**Lage von Punkten im erweiterten Koordinatensystem**

**Spiegeln von Punkten an einer Spiegelachse**

**Kenntnis der Begriffe : Besondere Punkte im Dreieck und deren Konstruktion:**  
**Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt.**

**Eulersche Gerade. Umkreis und Inkreis.**

**Seitensymmetralen, Höhen, Winkelhalbierende, Schwerlinien**

**(Know- How->siehe Wissensleuchtturm der UE-&.3.Klasse)**

**Ziel dieses Kapitels (dieses Übungsleuchtturms) ist:**

**Vertiefendes Training der geometrischen Ausdrücke bei der Konstruktion von H,S,U und I**

**(Ausdrucksfähigkeit von „geometrischen Vokabeln“)**

**Lösungen findest du ab Seite 12**

## Lückentext

Ergänze die fehlenden Ausdrücke auf den Punktlinien!!!!

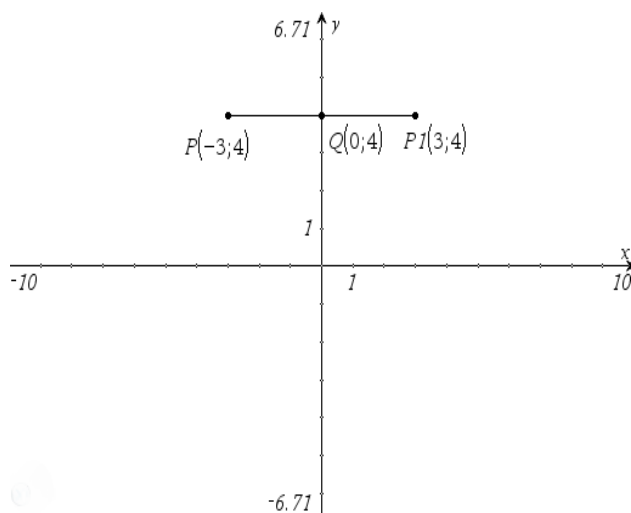
# 1 Der Umkreismittelpunkt-Umkreis

Zeichnen wir auf alle Dreiecksseiten jeweils eine .....- sie werden im Dreieck ..... genannt- so erhalten wir durch deren Schnitt die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U.

Die Konstruktion der Streckensymmetrale entspricht in folgendem Sinne der .....unserer vorherigen Übungsschili, die die unten angeführte Graphik nochmals veranschaulicht

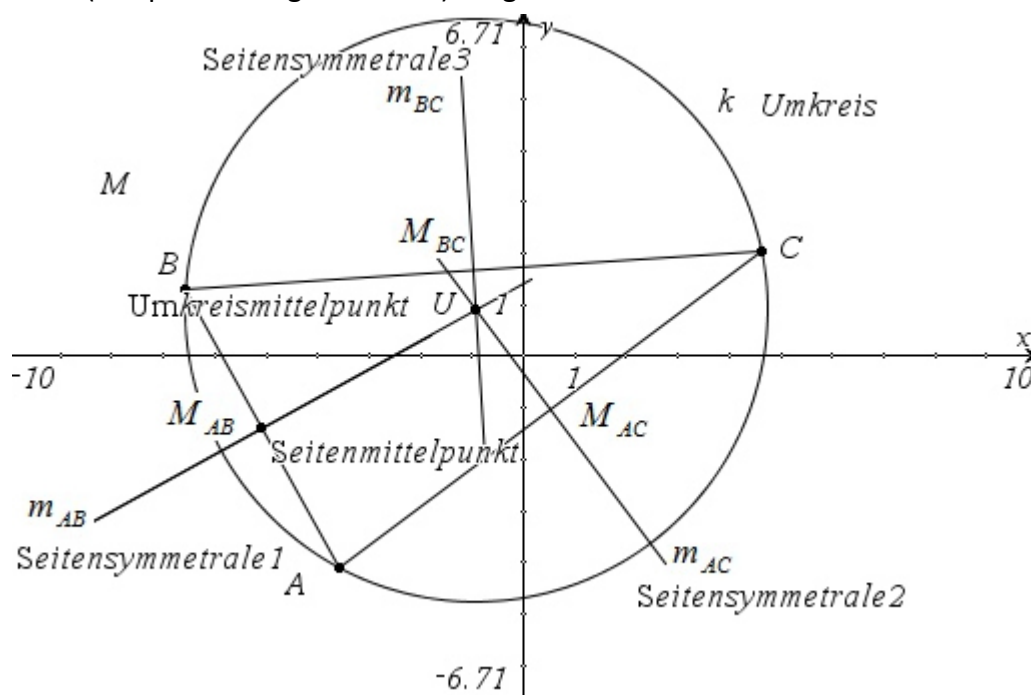
Q ist der .....der Strecke  $\overline{PP_1}$ .

Die..... ist die **Streckensymmetrale** der Strecke  $\overline{PP_1}$ . Im Dreieck werden wir sie **Seitensymmetrale** nennen.



Tafelkonstruktion der Eulerschen Geraden e

Hier sei nun als Veranschaulichung eine Konstruktion eines Umkreismittelpunkts und Umkreises (im spitzwinkligen Dreieck) ausgeführt:



$M_{AB}$  .....  $M_{AC}$  .....

$M_{BC}$  .....

U.....Umkreismittelpunkt

$m_{AB}$  .....

$m_{AC}$  .....

$m_{BC}$  .....

Stichst du in U ein und zeichnest du den..... durch alle 3 Eckpunkte des Dreiecks , hast du den .....konstruiert. **Der Radius des Umkreises** ist :  $r = \overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC}$

Merke: Die Seitensymmetrale .....auf die Dreiecksseite und verläuft durch den .....(und steht in diesem normal). Sie verläuft (im Allgemeinen) **nicht** durch den .....Eckpunkt (wäre Zufall!)

Der Umkreismittelpunkt U liegt beim ..... **innerhalb** ,

beim **stumpfwinkligen** Dreieck ..... **der Dreiecksfläche**.

Beim rechtwinkligen Dreieck ist er der .....



## Der Höhenschnittpunkt

Die Höhe ist eine.....auf ..... durch den

Die Höhe wird auch Höhenlinie genannt. Höhe bedeutet eigentlich eine begrenzte Länge ,  
Höhenlinie die verlängerte Gerade. In der Praxis wird aber eigentlich nicht unterschieden.

Der Schnitt der 3 ..... in einem Punkt ergibt den **Höhenschnittpunkt H**.

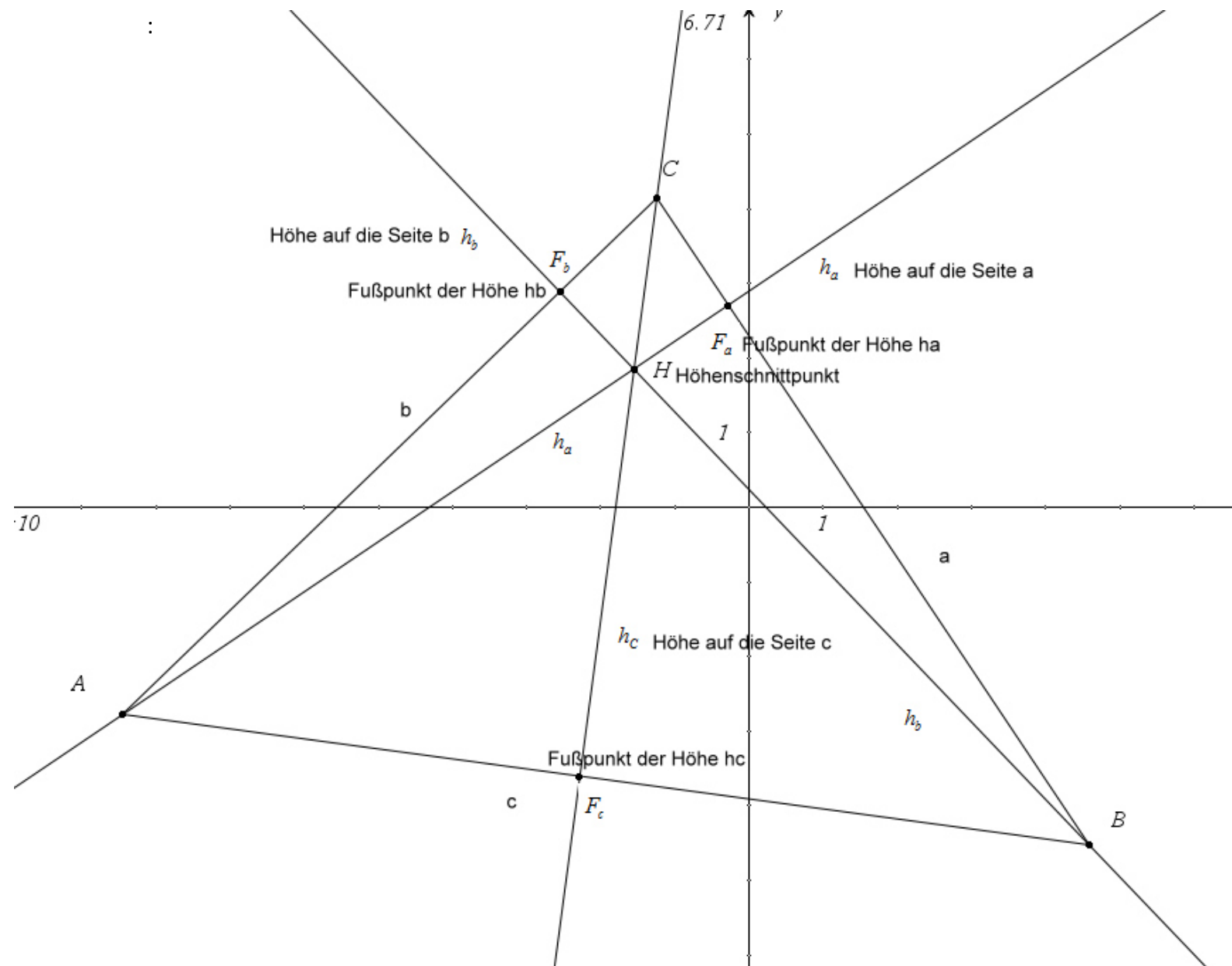
Konstruktionsgang für die Höhe:

Lege das Geodreieck **normal auf eine Seite** an (..... auf der Seite wie auf der  
Abbildung unten!) und ziehe eine Linie (=Normale) **durch den**



Merke: Der Höhenschnittpunkt H liegt beim spitzwinkligen Dreieck..... ,  
beim **stumpfwinkligen** ..... **der Dreiecksfläche.**

Beim rechtwinkligen Dreieck ist er der .....



Zeichne immer das Symbol des ..... im Schnitt der Höhen mit den Seiten

ein!

$F_a$  .....

$F_b$  .....

$F_c$  .....

$H$  .....

$h_c$  .....

$h_a$  .....

$h_b$  .....

# 3 Der Schwerpunkt

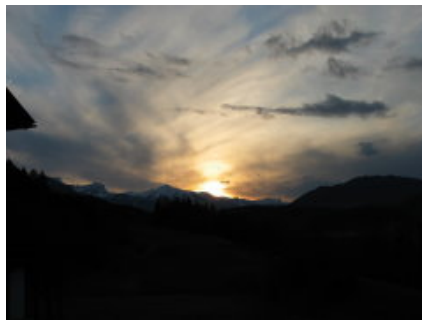
Die Schwerlinie ist die Verbindung vom ..... einer Dreiecksseite zum .....

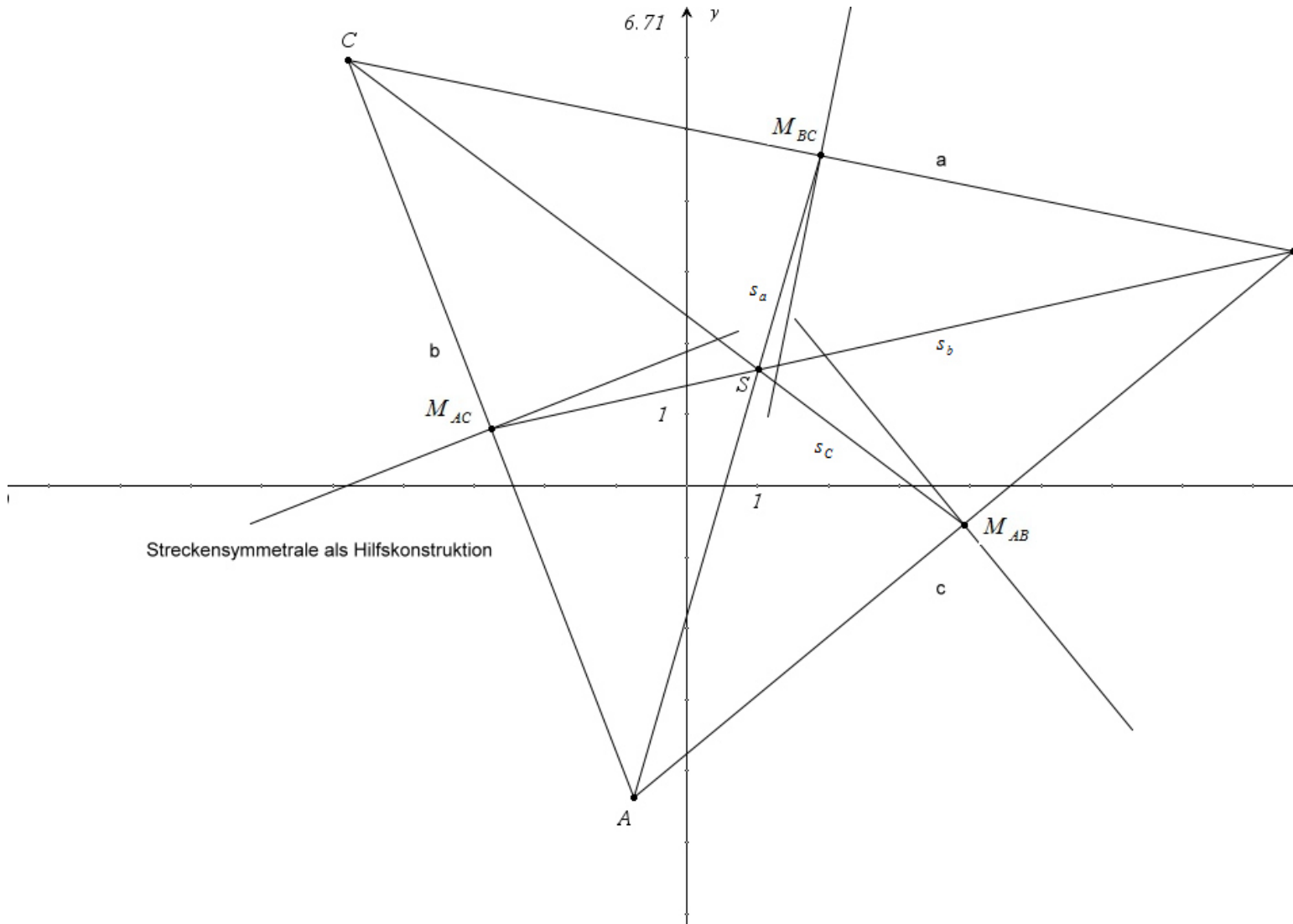
Der Schnitt der ..... in einem Punkt ergibt den **Schwerpunkt S**.

Er liegt stets ..... des Dreiecks!

Die Schwerlinie ..... **nicht** ..... auf die Dreiecksseite!

Merke: H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.





$M_{AB}$  .....  $M_{AC}$  .....

$M_{BC}$  .....

$s_a$  .....

$s_b$  .....

$s_c$  .....

# 4

## Der Inkreismittelpunkt

Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der .....

Er liegt immer .....!

Der Inkreis ..... die 3 ..... „von innen“ in den  
3.....*der Seiten mit dem Inkreis.*

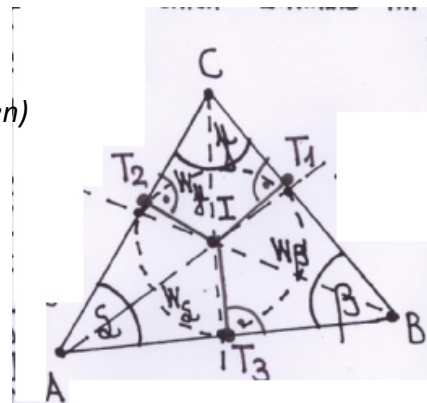
Die Winkelsymmetralen .....die Winkel, aber die dem Winkel gegenüberliegenden Seite im Allgemeinen nicht und .....auch nicht auf diese  
.....!!!

Willst du den **Radius des Inkreises**  $\rho$  (Rho) konstruieren so ziehst du.....auf  
die Dreiecksseiten zum ..... Der jeweilige Schnittpunkt der Normalen  
mit der Dreiecksseite wird .....genannt. Es gibt also **3**  
**Berührungspunkte** des Inkreises im Dreieck: .....

In A ist der Winkel ..... (.....ausgeschrieben)

In B ist der Winkel ..... (.....ausgeschrieben)

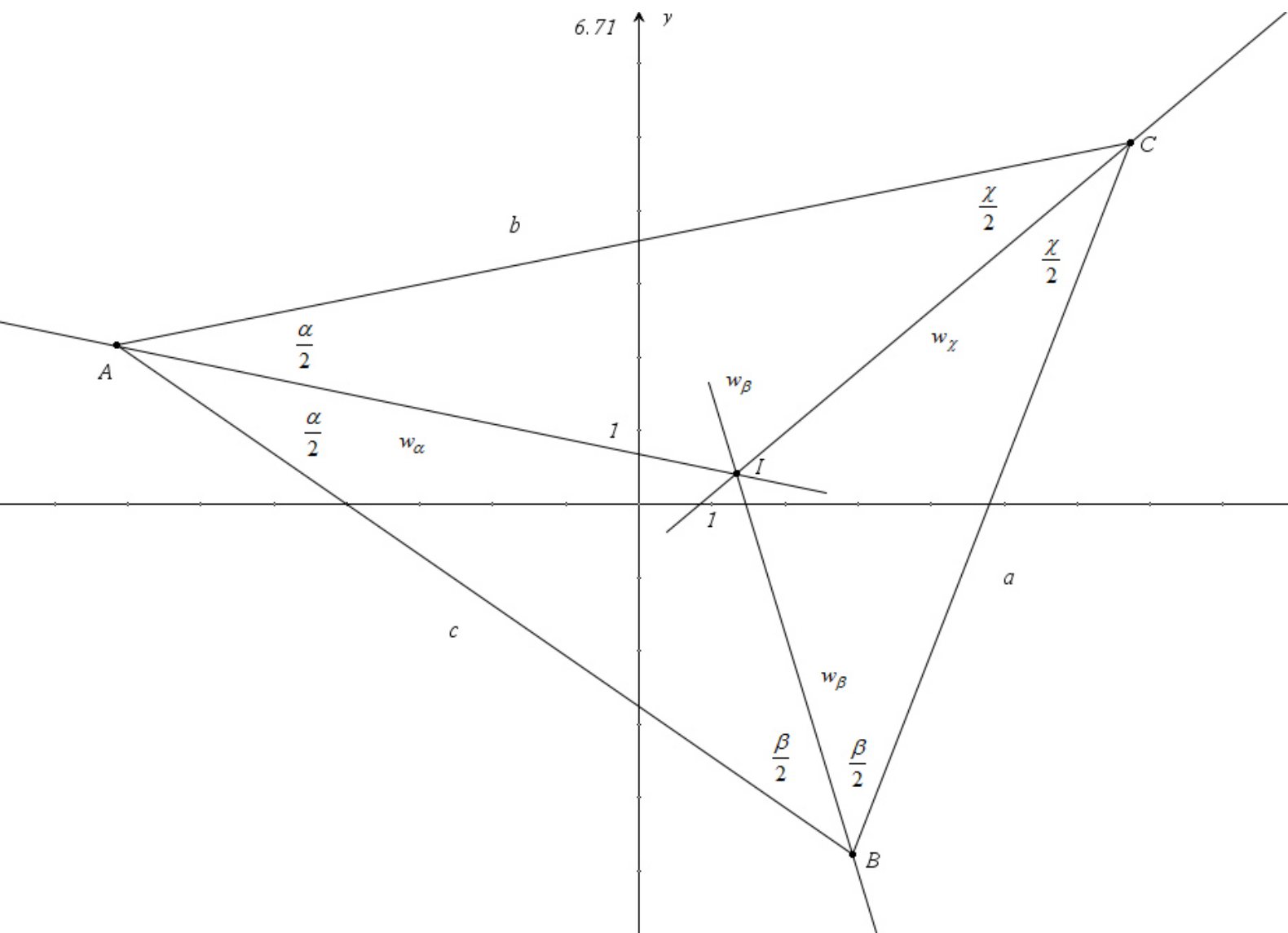
In C ist der Winkel ..... (.....ausgeschrieben)



Der Inkreis darf nie über eine .....hinausgehen!!!

Passe daher zuerst mit dem Zirkel deinen Kreis in den 3 Seitenberührungspunkten an ,bevor du ihn durchziehst!!!

**Merke:** H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.



$w_\alpha$  .....  $w_\beta$  .....

$w_\gamma$  .....

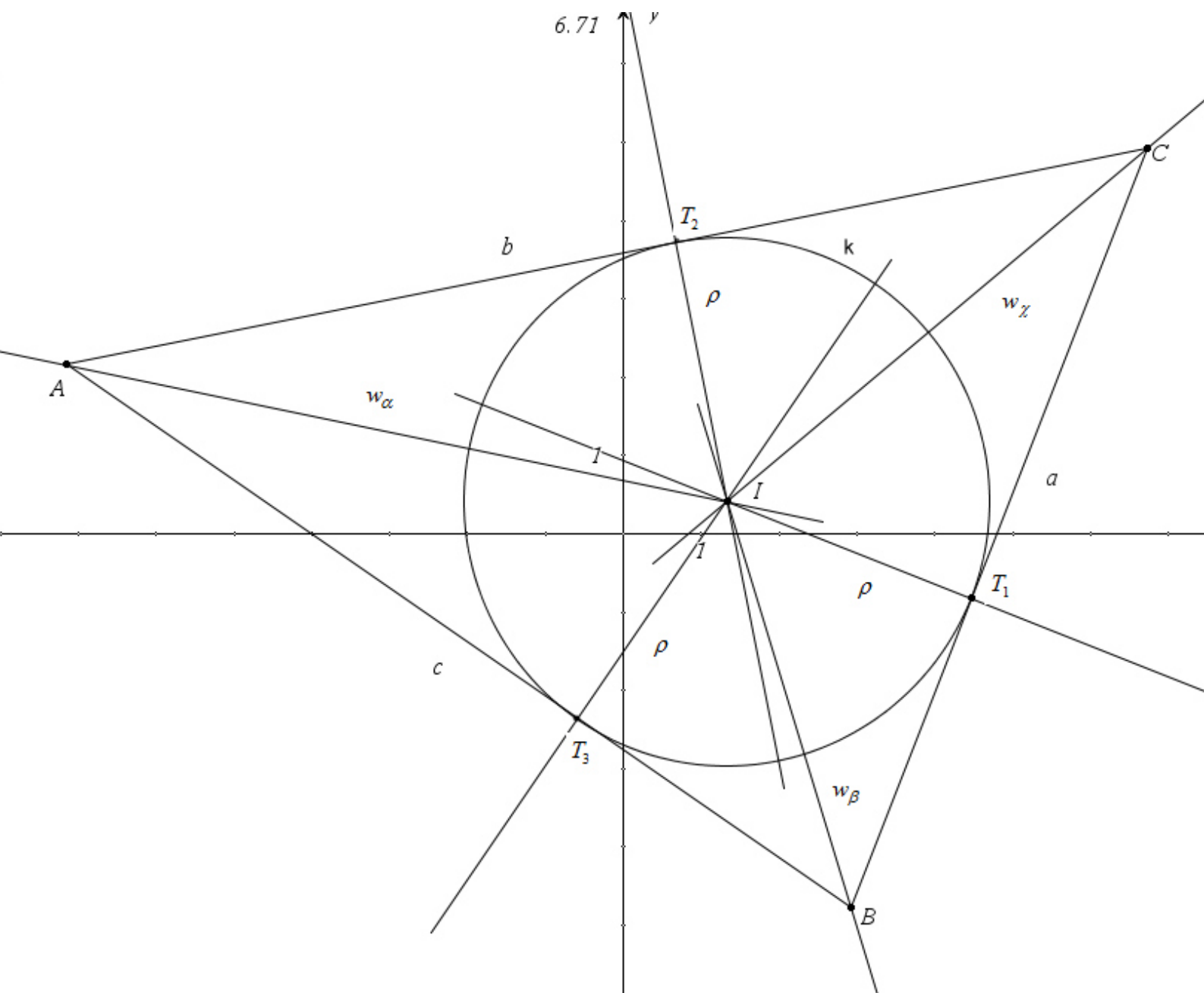
Die Winkelsymmetralen ..... also die 3Winkel

$T_1$ .....  $T_2$ .....

$T_3$ .....

$\rho$ .....(ausgeschrieben).....

$I$ .....



# Die Eulersche Gerade

Die Eulersche Gerade, benannt nach dem berühmten .....Mathematiker *Leonhard Euler*, verläuft durch die..... in jedem Dreieck, egal ob dieses stumpfwinkelig,..... ist.

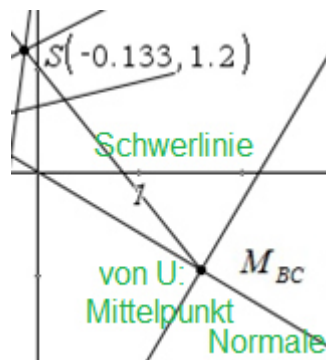
Sie verläuft nicht durch .....

Merke dir:

**eU**ler**S**He Gerade - >es kommt kein „l“ im Text vor

Überlege: (->>siehe Abbildung )

Konstruierst du zuerst den Umkreismittelpunkt, hast du bereits den ..... der Seiten mit der Normalen bestimmt und hast somit für den .....die Verbindungspunkte.



# Lösungen

## Übungsleuchtturm 007

Der Text ist vollständig angeführt.



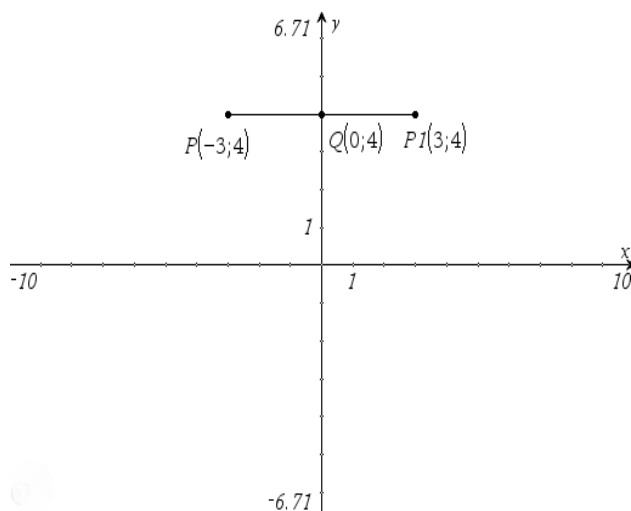
## Der Umkreismittelpunkt-Umkreis

Zeichnen wir auf alle Dreiecksseiten jeweils eine **Streckensymmetrale**- sie werden im Dreieck **Seitensymmetralen** genannt- so erhalten wir durch deren Schnitt die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U.

Die Konstruktion der Streckensymmetrale entspricht in folgendem Sinne der Spiegelung unserer vorherigen Wissensschi, die die unten angeführte Graphik nochmals veranschaulicht

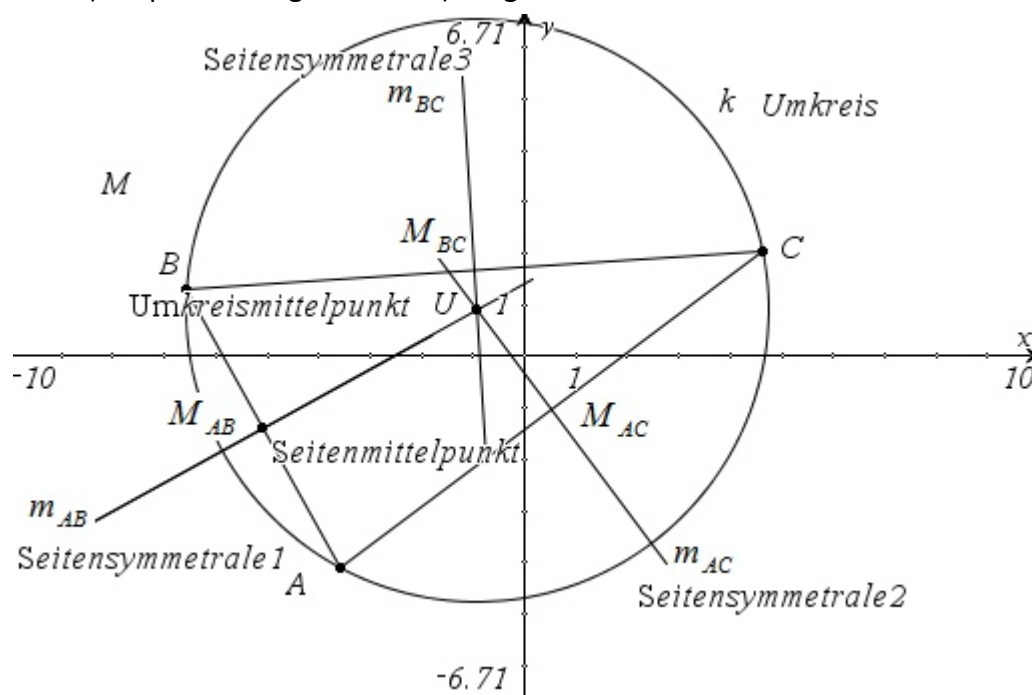
$Q$  ist der **Mittelpunkt (Halbierungspunkt)** der Strecke  $\overline{PP_1}$ .

Die  $y$ -Achse ist die **Streckensymmetrale** der Strecke  $\overline{PP_1}$ . Im Dreieck werden wir sie **Seitensymmetrale** nennen.



Tafelkonstruktion der Eulerschen Geraden e

Hier sei nun als Veranschaulichung eine Konstruktion eines Umkreismittelpunkts und Umkreises (im spitzwinkligen Dreieck) ausgeführt:



$M_{AB}$ .....Mittelpunkt der Seite (Seitenmittelpunkt) AB

$M_{AC}$ .....Mittelpunkt der Seite AC

$M_{BC}$ .....Mittelpunkt der Seite BC

U.....Umkreismittelpunkt

$m_{AB}$ .....Seitensymmetrale auf die Seite AB(c) durch den Mittelpunkt der Seite  $M_{AB}$

$m_{AC}$ .....Seitensymmetrale auf die Seite AC(b) durch den Mittelpunkt der Seite  $M_{AC}$

$m_{BC}$ .....Seitensymmetrale auf die Seite BC(a) durch den Mittelpunkt der Seite  $M_{BC}$

Stichst du in U ein und zeichnest du den Kreis durch alle 3 Eckpunkte des Dreiecks, hast du den Umkreis k konstruiert. **Der Radius des Umkreises** ist :  $r = \overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC}$

Merke: Die Seitensymmetrale steht normal auf die Dreiecksseite und verläuft durch den Mittelpunkt der Seite. (und steht in diesem normal). Sie verläuft (im Allgemeinen) **nicht** durch den gegenüberliegenden Eckpunkt (wäre Zufall!)

Der Umkreismittelpunkt U liegt beim **spitzwinkligen Dreieck innerhalb**,

beim **stumpfwinkligen Dreieck außerhalb der Dreiecksfläche**.

Beim rechtwinkligen Dreieck ist er der Mittelpunkt der Hypotenuse.

## 2 Der Höhenschnittpunkt

Die Höhe ist eine **Normale** auf die Dreiecksseite durch den **gegenüberliegenden Eckpunkt**.

Die Höhe wird auch Höhenlinie genannt. Höhe bedeutet eigentlich eine begrenzte Länge, Höhenlinie die verlängerte Gerade. In der Praxis wird aber eigentlich nicht unterschieden.

Der Schnitt der 3 Höhen(-linien) in einem Punkt ergibt den **Höhenschnittpunkt H**.

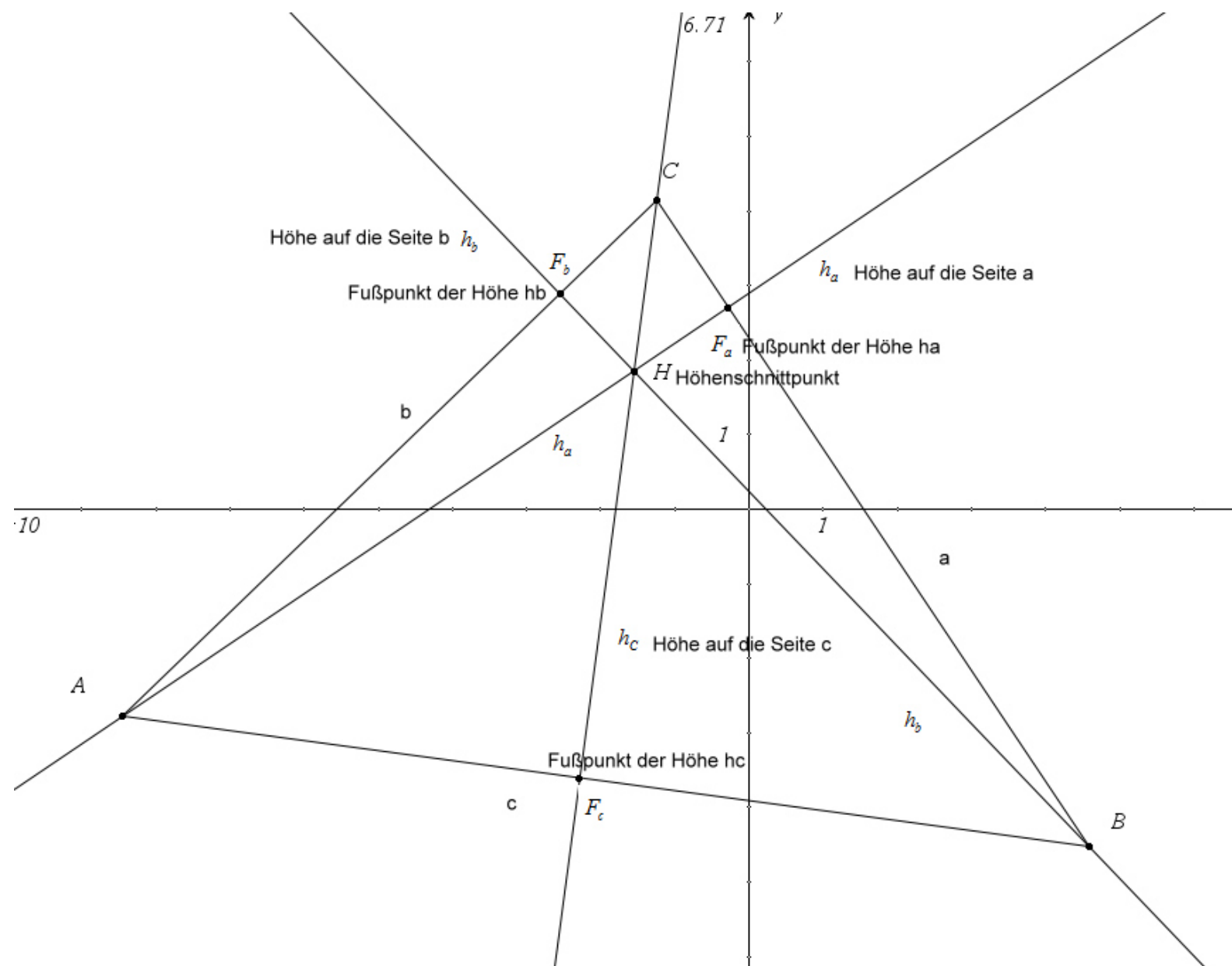
Konstruktionsgang für die Höhe:

Lege das Geodreieck **normal auf eine Seite** an (Nulllinie auf der Seite wie auf der Abbildung unten!) und ziehe eine Linie (=Normale) **durch den gegenüberliegenden Eckpunkt**.



Merke: Der Höhenschnittpunkt H liegt beim **spitzwinkligen Dreieck innerhalb**,  
beim **stumpfwinkligen außerhalb der Dreiecksfläche**.

Beim rechtwinkligen Dreieck ist er der Scheitel des rechten Winkels



Zeichne immer das Symbol des rechten Winkels im Schnitt der Höhen mit den Seiten ein!

$F_a$ .....Fußpunkt der Höhe  $h_a$  auf die Seite  $a$  = Schnittpunkt der Höhe  $h_a$  mit der Seite  $a$

$F_b$ .....Fußpunkt der Höhe  $h_b$  auf die Seite  $b$  = Schnittpunkt der Höhe  $h_b$  mit der Seite  $b$

$F_c$ .....Fußpunkt der Höhe  $h_c$  auf die Seite  $c$  = Schnittpunkt der Höhe  $h_c$  mit der Seite  $c$

$H$ .....Höhenschnittpunkt

$h_c$ .....Höhe auf die Seite  $AB$  ( $c$ ) (durch den Eckpunkt  $C$ )

$h_a$ .....Höhe auf die Seite  $BC$  ( $a$ ) (durch den Eckpunkt  $A$ )

$h_b$ .....Höhe auf die Seite  $AC$  ( $b$ ) (durch den Eckpunkt  $B$ )

# 3 Der Schwerpunkt

Die Schwerlinie ist die Verbindung vom Mittelpunkt einer Dreiecksseite zum gegenüberliegenden Eckpunkt.

Der Schnitt der 3 Schwerlinien in einem Punkt ergibt den **Schwerpunkt S**.

Er liegt stets innerhalb des Dreiecks!

**Die Schwerlinie steht nicht normal** auf die Dreiecksseite!

## Konstruktionsgang für die Schwerlinie

- 1.) Halbiere die Seite des Dreiecks mittels Streckensymmetrale (siehe Unterkapitel 1.): "Umkreismittelpunkt" sowie Veranschaulichung im nächsten Absatz)  
Du erhältst den Mittelpunkt der Dreiecksseite.

(zeichne eine nicht all zu lange Normale->also nicht über die Seite schneidend hinaus)

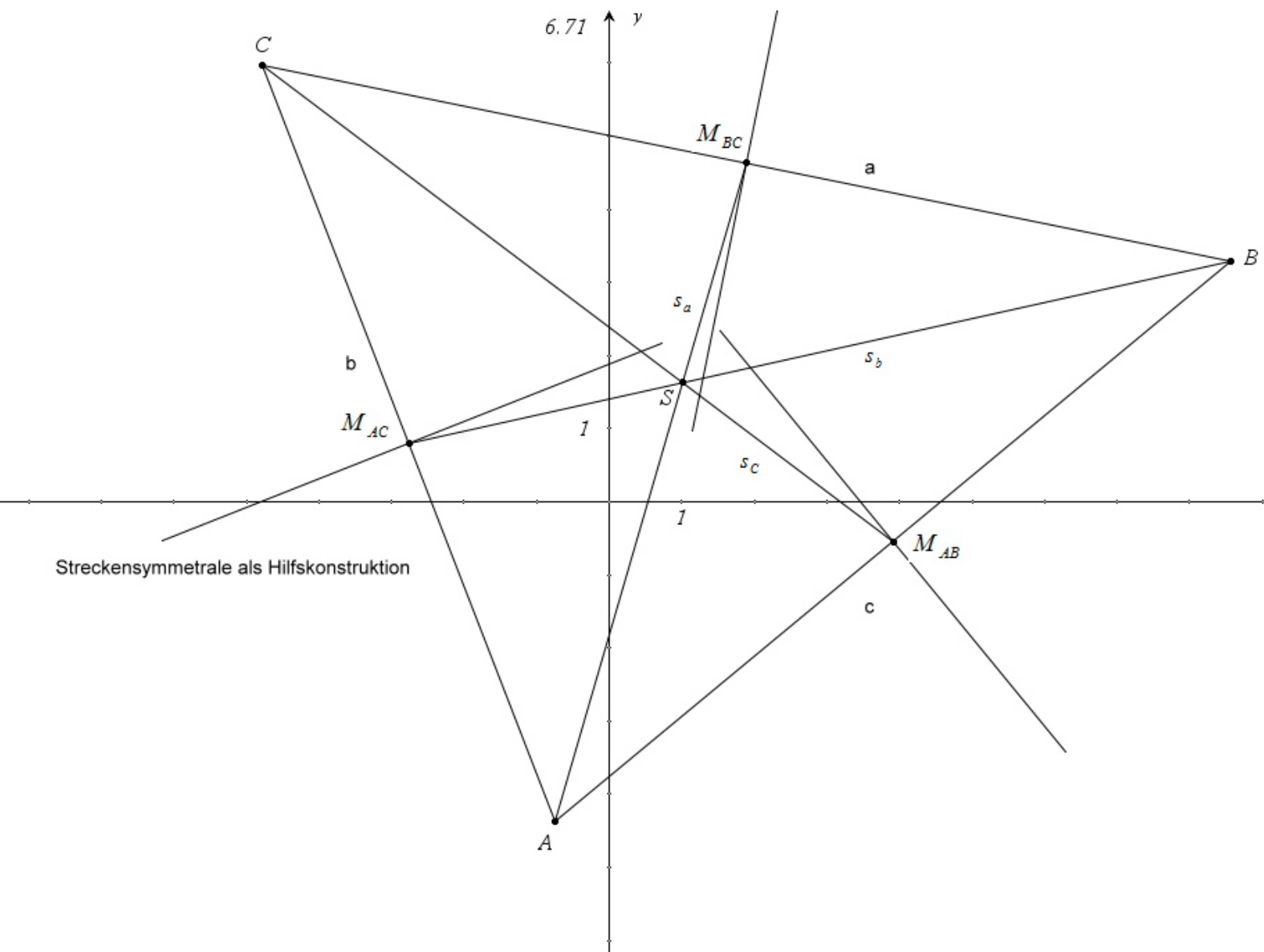
- 2.) ziehe eine Linie vom Mittelpunkt zum gegenüberliegenden Eckpunkt

Ein paar Bemerkungen dazu im nächsten Absatz (Veranschaulichung)

Bei der Konstruktion der Schwerlinie selbst gibt es keine Normale, sie ist nur die Verbindung zwischen 2 speziellen Punkten, eine Normale wird nur bei der Konstruktion des Mittelpunkts als Punktermittlung als Hilfslinie gelegt!!!

**Merke:** H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.





$M_{AB}$  ..... Mittelpunkt der Seite (Seitenmittelpunkt) AB

$M_{AC}$  ..... Mittelpunkt der Seite AC

$M_{BC}$  ..... Mittelpunkt der Seite BC

$s_a$  ..... Schwerlinie auf die Seite a = Strecke  $\overline{M_{BC}A}$

$s_b$  ..... Schwerlinie auf die Seite b = Strecke  $\overline{M_{AC}B}$

$s_c$  ..... Schwerlinie auf die Seite c = Strecke  $\overline{M_{AB}C}$

# 4 Der Inkreismittelpunkt

Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der 3 **Winkelsymmetralen**.

Er liegt immer innerhalb der Dreiecksfläche!

Der Inkreis berührt die 3 Dreiecksseiten „von innen“ in den 3 *Berührungspunkten der Seiten mit dem Inkreis*.

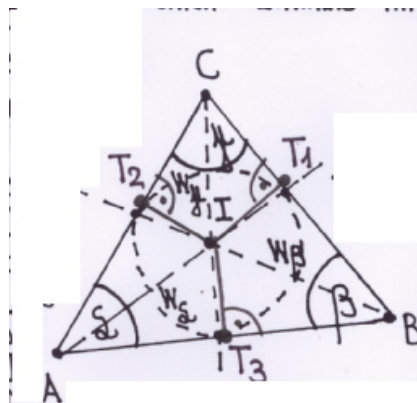
Die Winkelsymmetralen halbieren die Winkel, aber die dem Winkel gegenüberliegenden Seite im Allgemeinen nicht und stehen auch nicht auf diese normal!!!!

Willst du den **Radius des Inkreises**  $\rho$  (Rho) konstruieren so ziehst du Normale auf die Dreiecksseiten zum Inkreismittelpunkt  $I$ . Der jeweilige Schnittpunkt der Normalen mit der Dreiecksseite wird **Berührungspunkt des Inkreises** genannt. Es gibt also **3 Berührungspunkte** des Inkreises im Dreieck:  $T_1, T_2$  und  $T_3$  !

In A ist der Winkel  $\alpha$  (Alpha)

In B ist der Winkel  $\beta$  (Beta)

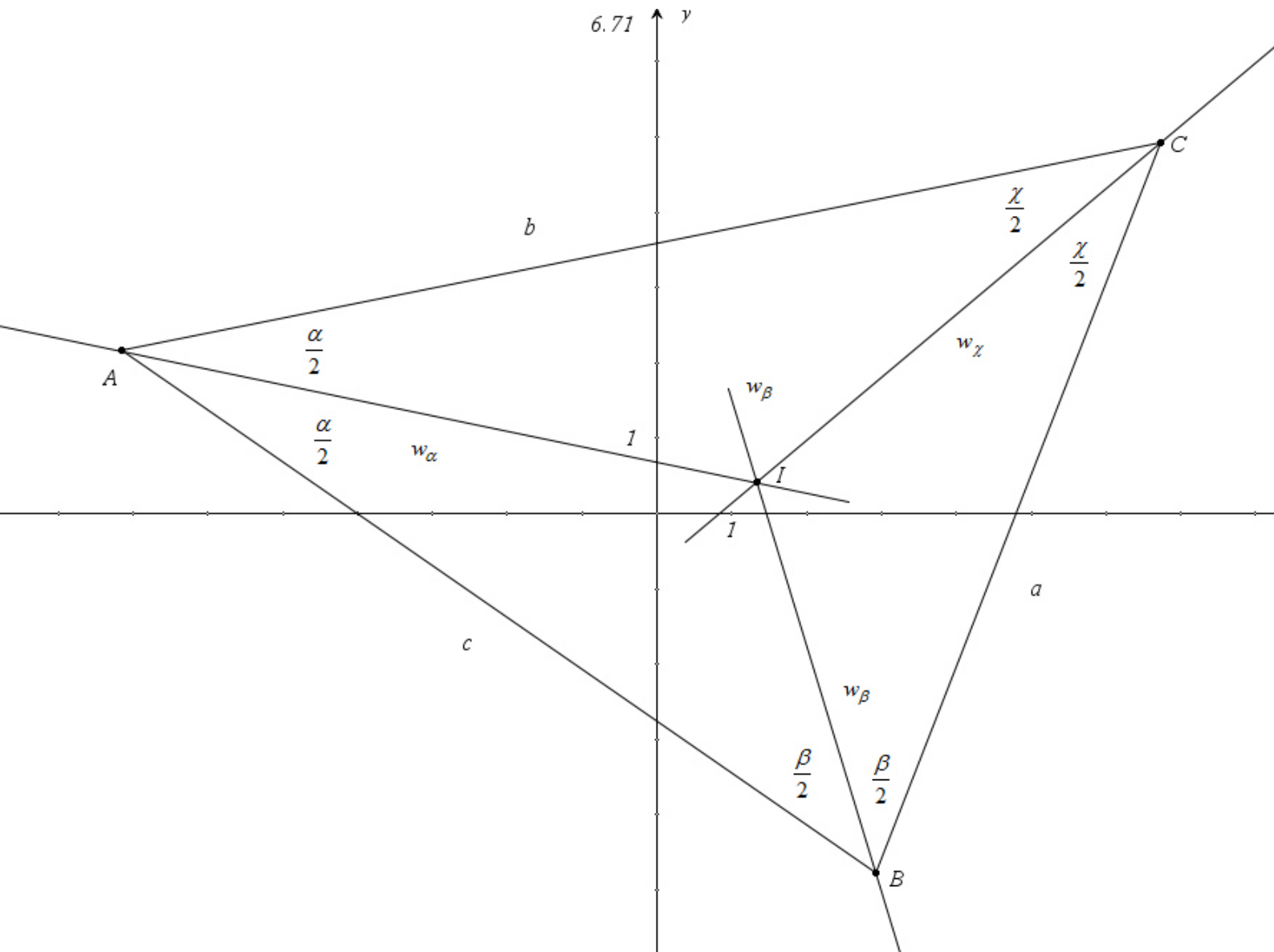
In C ist der Winkel  $\gamma$  (Gamma)



Der Inkreis darf nie über eine Dreiecksseite hinausgehen!!!

Passe daher zuerst mit dem Zirkel deinen Kreis in den 3 Seitenberührungspunkten an ,bevor du ihn durchziehst!!!

**Merke:** H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.



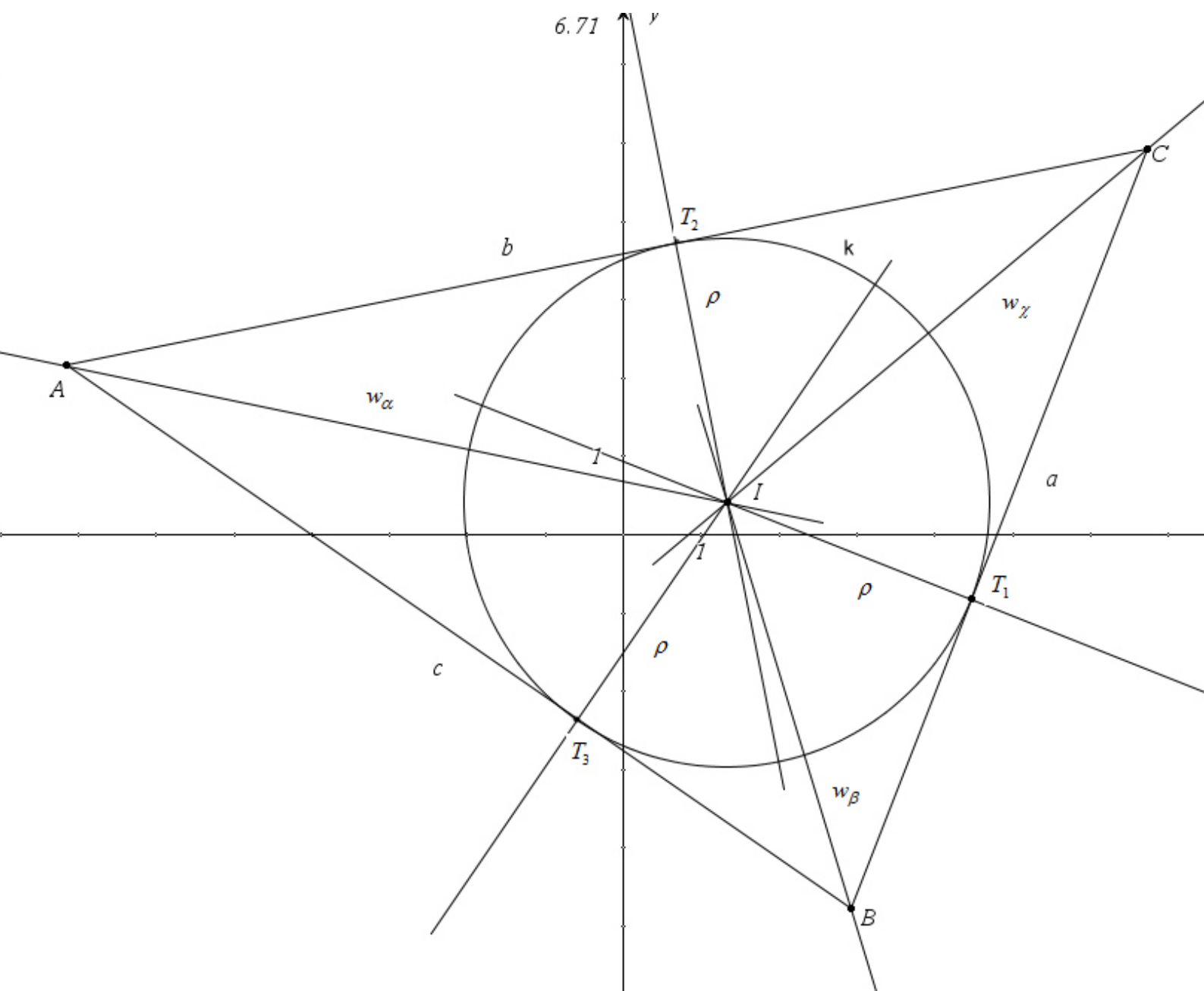
$w_\alpha$ .....Winkelsymmetrale des Winkels  $\alpha$   
 $w_\gamma$ .....Winkelsymmetrale des Winkels  $\gamma$

$w_\beta$ .....Winkelsymmetrale des Winkels  $\beta$

Die Winkelsymmetralen halbieren also die 3Winkel

$T_1$ .....Berührungspunkt des Inkreises mit derSeite  $a$        $T_2$ .....Berührungspunkt des Inkreises mit derSeite  $b$   
 $T_3$ .....Berührungspunkt des Inkreises mit derSeite  $c$

$\rho$ .....RHO.....Radius des Inkreises  
 $I$ .....Inkreismittelpunkt



# Die Eulersche Gerade

Die Eulersche Gerade, benannt nach dem berühmten Schweizer Mathematiker *Leonhard Euler*, verläuft durch die 3 besonderen Punkte U, H und S in jedem Dreieck, egal ob dieses stumpf-, spitz- oder rechtwinkelig, gleichschenkelig, gleichseitig..... ist.

Sie verläuft nicht durch den **Inkreismittelpunkt I** !!!!!!!

Merke dir:

**eUlerSCHe** Gerade - >es kommt kein „I“ im Text vor

Überlege: (->>siehe Abbildung )

Konstruierst du **zuerst den Umkreismittelpunkt**, hast du bereits den Mittelpunkt der Seiten mit der Normalen bestimmt und hast somit für den Schwerpunkt die Verbindungspunkte.

