Wissensleuchtturm 2.Klasse

Ein Wissensleuchtturm ist eine *abschließende Zusammenfassung des Stoffs einer Schulstufe* in Schwerpunkt-Übersichtsform am Ende eines Blocks von Übungsleuchttürmen einer jeweiligen Klasse und beinhaltet reine Lerntheorie (oft mit Musterbeispielen zum Verständnis),welche in Querverbindung mit den Standards der Übungsleuchttürme steht.

Zusätzliche Stoffgebiete werden in den Lösungen der Übungsleuchttürme stets ausführlich behandelt.

Ich notiere und erkläre nur *Stoffkapitel, die relevant für den „Rätselblock“* der Übungsleuchttürme sind und darin vorkommen!

Inhaltsverzeichnis

Wissensleuchtturm zu:→>

Bem.: Wissensleuchtturm zu **Übungsleuchtturm Nr.001-> siehe** Wissensleuchtturm 1.Kl."Dezimalzahlen und Brüche"

Wissensleuchtturm zu->:

Zu den Übungsleuchttürmen Nr.017 und Nr.018 gibt es keinen eigenen Wissensleuchtturm,

die erklärende ausführliche Theorie findest du im Lösungsteil der beiden Übungsleuchttürme,

sowie in allen Bruch-Wissensleuchttürmen!!!

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **001**

siehe Wissensleuchtturm der 1.Klasse

„Dezimalzahlen und Brüche“->>> Part 2 und 3

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **002**

Quader und Würfel - Oberfläche und Volumen

zu Übungsleuchtturm Nr.002

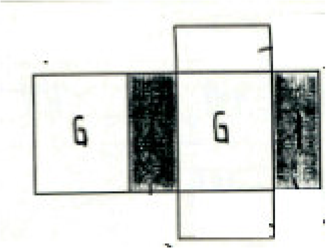
Quader und Würfel- Oberfläche und Volumen

1.)Der Quader

Oberfläche des Quaders:

Die Oberfläche ist jene Fläche,die ich „angreifen/bekleben/ausschneiden kann-ich brauche dazu Material.(zum Beispiel einen Karton zum Zusammenbauen einer Big-Mac-schachtel)

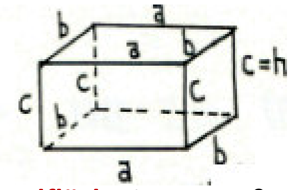
Die Oberfläche sehen wir sehr schön am ***Netz*** eines Quaders (bevor wir den Quader noch zusammenkleben)



M…..Mantel= unbeschriftete Teile

$O = 2 \cdot G + M \qquad G..........Grundfläche \qquad M......Mantel$

Wir berechnen die Oberfläche ,indem wir 2mal **die Grundfläche** nehmen und den **Mantel** dazu addieren !!!



Die **Grundfläche** ist so groß wie die Deckfläche in einem Quader, es sind beides *Rechtecke*

(Formel für die Fläche eines Rechtecks = $a \cdot b$)

->daher gilt für die Flächen „oben und unten“ (Grund-und Deckfläche): $2 \cdot G = 2 \cdot a \cdot b$

Nun der **Mantel**- also die 4 Seitenflächen:

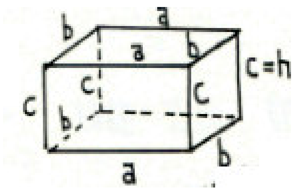
Die Fläche für die *vordere und hintere Seitenfläche* in der Skizze ist die Fläche für 2 **Rechtecke**: $2 \cdot a \cdot c$

Die Fläche für die beiden *seitlichen Seitenflächen* in der Skizze ist die Fläche für 2 Rechtecke: $2 \cdot b \cdot c$

Somit gilt für die Gesamtfläche der **Oberfläche eines Quaders**:

$\boxed{O = (2 \cdot a \cdot b) + (2 \cdot a \cdot c) + (2 \cdot b \cdot c)}$

Volumen des Quaders:



Das Volumen (der Rauminhalt) eines Quaders ist jenes Maß, das angibt ,wieviel Wasser(oder Flüssigkeit)ich in einen Quader hinein füllen kann.

Das Volumen „kann ich nicht angreifen"-verwechsle es also nicht mit der Oberfläche!

$\boxed{V = G \cdot h}$ Das Volumen ist die **Grundfläche mal der Höhe**

$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$ $a \cdot b$ ist die Fläche eines Rechtecks als *Grundfläche, c ist die Höhe*

Übung

Ü1 *Berechne Oberfläche und Volumen* des folgenden Quaders:

Achte auf die Einheiten!!!! Wandle in die angegebene Einheit um!

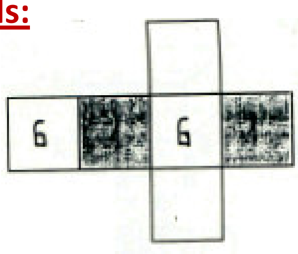
Du wirst bemerken: Wir trainieren und wiederholen das Multiplizieren von

Dezimalzahlen!!!!

1.) $a = 5{,}8cm \quad b = 4{,}9cm \quad c = 6{,}7cm$
2.) $a = 3{,}8dm \quad b = 22cm \quad c = 6{,}1cm \rightarrow rechne\ in\ dm$
3.) $a = 122{,}2m \quad b = 94{,}9m \quad c = 404{,}3dm \rightarrow rechne\ in\ m$
4.) $a = 47{,}48m \quad b = 94{,}4m \quad c = 3{,}7m$
5.) $a = 9m \quad b = 422cm \quad c = 13dm \rightarrow rechne\ in\ cm$

2.) Der Würfel

Oberfläche des Würfels:

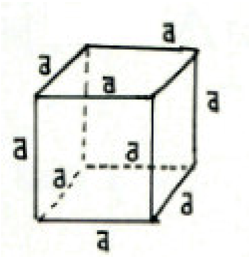


M…..Mantel= unbeschriftete Teile

G…. Grundfläche

Die Oberfläche sehen wir sehr schön am ***Netz*** eines Würfels (bevor wir den Würfel noch zusammenkleben).Es geht bei der Oberfläche also wie beim Quader wieder um den Materialverbrauch.

$O = 2 \cdot G + M$ $\quad G.........Grundfläche \quad M......Mantel$



Die **Grundfläche** ist so groß wie die Deckfläche in einem Würfel, es sind beides *Quadrate*

(Formel für die Fläche eines Quadrats $A = a \cdot a = a^2$ sprich: „a hoch 2“oder „a Quadrat“

->daher gilt für die Flächen „oben und unten“ (Grund-und Deckfläche): $2 \cdot G = 2 \cdot a \cdot a = 2a^2$

Nun der **Mantel**- also die 4 Seitenflächen:

Die Fläche für die *vordere und hintere Seitenfläche* in der Skizze ist die Fläche für 2 Quadrate:

$2 \cdot a \cdot a = 2a^2$ Sprich: „2 a hoch zwei“ oder „2 a Quadrat***“- Begriff der Potenz***

Die Fläche für die beiden *seitlichen Seitenflächen* in der Skizze ist wieder die Fläche für 2 Quadrate:

$2 \cdot a \cdot a = 2a^2$

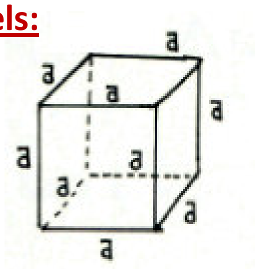
Merke dir: a **mal** a ist a hoch 2!!!!!

Somit gilt für die Gesamtfläche der **Oberfläche eines Würfels**:

$\boxed{O = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a \cdot a}$ $\boxed{O = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot a^2 + 2 \cdot a^2 = 6 \cdot a^2}$

$\boxed{O = 6 \cdot a \cdot a}$ 6 a hoch 2

Volumen des Würfels:



$\boxed{V = G \cdot h}$ Das Volumen ist die **Grundfläche mal der Höhe**

$\boxed{V = a \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a = a^3}$ sprich: *„a hoch 2 mal a“* oder *„ a Quadrat mal a“*

$a \cdot a = a^2$ ist die Fläche eines **Quadrats** als *Grundfläche,*

a ist die *Höhe*

$\boxed{V = a^3}$ sprich: *„a hoch 3“* oder *„ a der dritten“*

Übung

Ü2 *Berechne Oberfläche und Volumen* des folgenden Würfels:

Du wirst bemerken: Wir trainieren und wiederholen das Multiplizieren von Dezimalzahlen!!!!

Rechne in der angegebenen Einheit und wandle dann das Ergebnis in $cm^3, dm^3 und\ m^3$

-also in *die nächstkleinere und nächstgrößere* Einheit - um!

1.) $a = 19{,}8cm$
2.) $a = 223m$
3.) $a = 37{,}79cm$
4.) $a = 67{,}9m$

Die Raummaße

Kubik und Liter

In einem King Mc Kebab Restaurant gibt es eine quaderförmige Getränkebox mit $1m^3$

(sprich: 1 **Kubikmeter**) Eistee. Dies sind $10hl$ (**Hektoliter**)

Diese Box beinhaltet also 1000 Literflaschen Eistee und ist ***ein Würfel von 1m Kantenlänge.***

$1m^3 = 10hl = 1000l = 1000dm^3$ **Kubikdezimeter**

$1hl = 100l = 100dm^3 = 0{,}1m^3$ **Kubikmeter**

$1l = 1dm^3$

$1cm^3$ **1 Kubikzentimeter**

Der Umwandlungsraster für Raummaße

m^3			dm^3			cm^3
	hl		L (Liter)	dl(Deziliter)	cl	ml(Mililiter)

Übung

Ü3 Wandle in m^3 um:

1.) $488cm^3$
2.) $2900cm^3$
3.) $67000cm^3$
4.) $2cm^3$
5.) $13cm^3$

Ü4 Wandle in dm^3 um: $4cm^3$

Ü5 Wandle in cm^3 um: $17dm^3$

Lösungen zu Übungen

Ü1

1.) $O = 200{,}22cm^2 \quad V = 190{,}414cm^3$
2.) $O = 24{,}04dm^2 \quad V = 5{,}0996dm^3$
3.) $O = 40748.266m^2 \quad V = 468857{,}8154m^3$
4.) $O = 10014.1m^2 \quad V = 16583.8m^3$
5.) $O = 110332cm^2 \quad V = 49374000cm^3$

Ü2

1.) $O = 2352{,}24cm^2 = 23{,}5224dm^2 = 235224mm^2$
$V = 7762{,}392cm^3 = 7762392mm^3 = 7{,}762392dm^3$

2.) $O = 298374m^2 \quad V = 11089567m^3$

3.) $O = 8568{,}5046cm^2 \quad V = 53967{,}298139cm^3$

4.) $O = 27662{,}46m^2 \quad V = 313046{,}839m^3$

Ü3 1.) $0.000498m^3$

2.) $0.0029m^3$

3.) $0.067m^3$

4.) $0.000002m^3$

5.) $0.000013m^3$

Ü4 $0.004dm^3$

Ü5 $17000cm^3$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **003**

Die

Teilbarkeitsregeln

Wissensleuchtturm

2.Klasse

Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Begriff des Teilers :

Eine Zahl $b \neq 0$ heißt ***Teiler*** einer ganzen Zahl a, wenn es eine ganze Zahl t gibt, sodass gilt:

$\boxed{a = t \bullet b}$

$a \text{ ist ein Vielfaches von } b \Leftrightarrow b \text{ ist Teiler von } a$

Bsp: 9 ist **Teiler** der ganzen Zahl 18, weil es eine ganze Zahl 2 gibt, sodass gilt:

$18 = 2 \cdot 9$ $18 : 9 = 2$ $18 : 2 = 9$ 9 ist Teiler von 18

Wir können 18 durch 9 **ohne Rest** teilen. Es liegt also der Begriff des **Teilers** vor.

Wir erinnern uns an die 1.Klasse: Eine Menge wird mit einer geschwungenen Klammer { } angeschrieben. Wir haben den Begriff der Menge auch bei der Teilermenge kennengelernt.

Die **Teilermenge** von 10 zum Beispiel wird bezeichnet mit

$T_{10} = \{1,2,5,10\}$ 4 *Elemente* *aufzählendes Verfahren einer Mengendarstellung*

Die Teilermenge von 19 zum Beispiel wird bezeichnet mit

$T_{19} = \{1, 19\}$ 2 *Elemente*

19 ist eine **Primzahl**. Eine Primzahl hat immer nur *2 Elemente* in ihrer Teilermenge:

1 und die Zahl selbst.

36:6=6 Wir können 36 ohne Rest dividieren.

6 ist Teiler von 36 $6|36$ **6 teilt 36** **36 ist durch 6 teilbar** **36:6=6**

Das Symbol für **„teilt“** ist ein *senkrechter gerader Strich*. $a|b$ a teilt b

39:7= Wir können 39 nicht ohne Rest durch 7 dividieren.

7 ist <u>kein</u> Teiler von 39 $7 \nmid 39$ **7 teilt nicht 39** **39 ist nicht durch 7 teilbar**

Das Symbol für „**teilt nicht** " ist ein *<u>senkrechter durchgestrichener gerader Strich</u>*. $\nmid$

a∤b ....a teilt nicht b

<u>Weitere Beispiele:</u>

15 ∤63 weil 63:15=4,2 nicht *<u>ohne Rest</u>* teilbar

$15|30 \quad weil \quad 30 = 2 \cdot 15 \qquad 2|30 \quad weil \quad 30 = 2 \cdot 15 = 15 \cdot 2$

Beachte: Null ist durch jede Zahl teilbar

$0:1=0 \qquad 0:45793456 = 0$

Aber $13:0 = "verboten"$ -> Die Division durch Null ist nicht zulässig in der Mathematik!!!

$44:44=1 \qquad 44 = 1 \cdot 44 \quad nach\ a = t \cdot b \qquad 44:1=44$

Auch 1 und die Zahl a selbst sind Teiler der Zahl a

Definition:

Gilt $1|a \quad und \quad a|a$ so sprechen wir von **<u>unechten Teilern</u>** der Zahl a

Bsp.: $a = 4 \rightarrow 1|4 \quad 4|4$ 1 und 4 sind unechte Teiler, weil $4:1=4 \quad und \quad 4:4=1$

Eine **Primzahl** *<u>hat nach den Überlegungen von Seite 1 **nur unechte Teiler!**</u>*

61 ist eine Primzahl $T_{61} = \{1, 61\} \quad 2\ Elemente$

Überlegen wir:

$10|20 \quad und \quad 10|100 \rightarrow 10|(20+100)\,????? \rightarrow 10|120$

Dies ist richtig. 10 teilt auch 120 weil $120:10=12$

Damit können wir allgemein die **Summenregel für die Teilbarkeit** formulieren:

$\boxed{t|a \quad und \quad t|b \rightarrow t|(\ a+b\ )}$

Bsp.: $9|18 \quad und \quad 9|36 \rightarrow 9|(18+36) \Rightarrow 9|54$

Teilt eine natürliche Zahl t eine natürliche Zahl a und auch eine natürliche Zahl b, dann teilt sie auch ihre Summe.

Überlegen wir:

$3|6$ teilt 3 auch ein Vielfaches von 6????

$3|(6\cdot 2) \rightarrow 3|12 \qquad 3|(6\cdot 3) \rightarrow 3|18 \qquad 3|(6\cdot 4) \rightarrow 3|24$

Es scheint also zu stimmen, dass ein Vielfaches von 6 auch durch 3 ohne Rest dividierbar ist.

Damit können wir allgemein **die Produktregel für die Teilbarkeit** formulieren:

$\boxed{t|a \rightarrow t|(n\cdot a)}$

Teilt eine natürliche Zahl t eine Zahl a, so teilt sie auch jedes Vielfache von a.

Wozu brauchen wir die Teilbarkeitsregeln????

1.) Um vor allem in **Brüchen** die Zahl, durch die du **kürzen kannst**, festzustellen.

Du wendest einfach in Zähler und Nenner die Teilbarkeitsregeln an.

2.) Um in einer *Primfaktorzerlegung* (werden wir im Folgenden kennenlernen) die zu teilende Zahl zu ermitteln (für ggT und kgV)

3.) um **Divisionen** im Allgemeinen durchführen zu können!

Teilbarkeitsregeln

1.) Eine ganze Zahl a ist durch 2 teilbar, wenn ihre

Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.

Beispiel: $2|9\underset{E}{4} \quad wegen \; 2|4$ $\qquad 2|303\underset{E}{6} \quad wegen \; 2|6$

Die durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen sind genau die **geraden Zahlen.**

2.) Eine ganze Zahl a ist durch 3 teilbar, wenn ihre **Ziffernsumme (Quersumme) durch 3 teilbar ist**

du brauchst also nur **die Ziffern der Zahl zu addieren**, die geteilt werden soll

Beispiel:

$3|2367768 \quad da \quad 2+3+6+7+7+6+8=39 \qquad 3|39 \rightarrow weil\, 39:3=13 \rightarrow \quad 3|2367768$

$3|40048637100743995 \quad da \sum (Summe\ )\ derZiffern\ = 72$

$3|72 \rightarrow weil\, 72:3=24 \rightarrow 3|40048637100743995$

3.) Eine ganze Zahl a ist durch 4 teilbar, wenn **DIE AUS ZEHNERZIFFER UND EINERZIFFER GEBILDETE ZAHL DURCH 4 TEILBAR IST.**

Beispiel: $4|8764\underset{Z}{4}\underset{E}{8} \quad wegen \; 4|48$ $\qquad 4|3450009564\underset{Z}{9}\underset{E}{6} \quad wegen \; 4|96$

4.) Eine ganze Zahl a ist durch 5 teilbar, wenn ihre Einerziffer 0 oder 5 ist.

Beispiel: $5 | 67890001\underset{E}{5} \quad wegen \ 5|5$

$5 | 3450009564\,9\underset{E}{0} \quad wegen \ 5|0 \rightarrow 0:5=0$

5.) Eine ganze Zahl a ist durch 6 teilbar, wenn SIE DURCH 2 und DURCH 3 TEILBAR IST.

Dies bedeutet, du musst die Teilbarkeitsregeln für 2 und 3 einfach überprüfen. Es müssen beide Regeln gelten-also Kriterien erfüllt sein.

Beispiel 1: $6 | 29\,4$

Wir müssen die Teilbarkeitsregeln für 2 und 3 überprüfen:

1.) *Teilbarkeitskriterium für 2:*
teilbar wenn die Einerstelle 0,2,4,6 oder 8 ist

$2 | 29\underset{E}{4} \quad trifft \ zu \ weil \ 2|4$

2.) *Teilbarkeitskriterium für 3:*
teilbar wenn die Ziffernsumme der zu teilenden Zahl durch 3 teilbar ist

$3 | 29\,4 \quad trifft \ zu \ weil \ 2+9+4=15 \rightarrow 3|15$

Beispiel 2: $6 | 430577682$

$2 | 43057768\,\underset{E}{2} \qquad UND \quad 3|42 \rightarrow 6|430577682$

6.) Eine ganze Zahl a ist durch 8 teilbar, wenn die aus *Hunderterziffer, Zehnerziffer und Einerziffer gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.*

Beispiel 1: $8|2340967 91\underset{H}{1}\underset{Z}{0}\underset{E}{4} \quad weil \quad 8|104 \rightarrow 104:8=13$

Beispiel 2: $8|5470000083131\underset{H}{0}\underset{Z}{0}\underset{E}{0} \quad weil \quad 8|0 \rightarrow 0:8=0$

7.) Eine ganze Zahl a ist durch 9 teilbar, wenn ihre **Ziffernsumme (Quersumme) durch 9 teilbar ist**

du brauchst also nur **die Ziffern der Zahl zu addieren**, die geteilt werden soll

Beispiel 1:

$9|457932141 \quad da \quad 4+5+7+9+3+2+1+4+1=36 \quad 9|36 \rightarrow weil\, 36:9=4 \rightarrow \quad 9|457932141$

Beispiel 2:

$9|1700000000\,00001 \quad da \sum (Summe)\ derZiffern = 9$

$9|9 \rightarrow 9|1700000000\,00001$

Merke: **Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist sie automatisch auch durch 3 teilbar**

Wenn sie durch 3 teilbar ist, muss sie aber nicht durch 9 teilbar sein!!!

Bsp1:

$9|457932141 \quad da \quad 4+5+7+9+3+2+1+4+1=36 \quad 9|36 \rightarrow weil\, 36:9=4 \rightarrow \quad 9|457932141$

$3|457932141 \quad da \quad 4+5+7+9+3+2+1+4+1=36 \quad 3|36 \rightarrow weil\, 36:3=12 \rightarrow \quad 3|457932141$

Bsp2:

$3|2367768 \quad da \quad 2+3+6+7+7+6+8=39 \quad 3|39 \rightarrow weil\, 39:3=13 \rightarrow \quad 3|2367768$

aber:

$9 \nmid 2367768$ da $2+3+6+7+7+6+8=39$ $\quad 9\nmid 39$!!!!!!!!

8.) Eine ganze Zahl a ist durch **10** teilbar, wenn ihre

Einerziffer 0 ist.

Beispiel: $10 \mid 43234\,\underset{E}{0}$ $\qquad$ $10 \mid 303\,6000\,\underset{E}{0}$

9.) Eine ganze Zahl a ist durch **25** teilbar, wenn ihre

<u>letzten beiden</u> Stellen 00 oder 25 oder 50

oder 75

sind.

Beispiel: $25 \mid 87654\underline{00}$ $\qquad$ $25 \mid 342567\,\underline{25}$ $\qquad$ $25 \mid 345009\,\underline{50}$

$25 \mid 457811\underline{75}$

10.) Eine ganze Zahl a ist durch **100** teilbar, wenn ihre

letzten beiden Ziffern Nullen sind. Also: 00

Beispiel: $100 \mid 67432\underline{00}$ $\qquad$ $100 \mid 500050000\,\underline{00}$

11.) Eine ganze Zahl a ist durch **1000** teilbar, wenn ihre

letzten drei Ziffern Nullen sind. Also: 000

Beispiel: $1000 \mid 6377788\,\underline{000}$ $\qquad$ $1000 \mid 500050000\,\underline{000}$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **004**

Die

Primfaktorenzerlegung

2.Klasse

Primzahlen Primfaktorenzerlegung

Euklid (ein Mathematiker in Griechenland, 4.und 3.Jahrhundert vor Christus) wies bereits den folgenden Satz nach:

es gibt unendlich viele Primzahlen

es gibt ja auch unendlich viele natürliche Zahlen!!!

In der Sprache der Mathematik:

$\boxed{\exists \infty \,\mathrm{Pr}\, imzahlen}$

Wir erinnern uns an die vorige Chili Nr.02 zur Teilbarkeit:

Die Teilermenge gibt die Anzahl der Teiler der jeweiligen Zahl an. Dabei war 1 und die Zahl selbst immer als Teiler fix dabei!!!!-es sind dies die unechten Teiler der Zahl.

Die **Teilermenge** von 12 zum Beispiel wird bezeichnet mit

$T_{12} = \{1,2,4,6,12\} \quad 5\ Elemente$

1 und 12 sind ihre *unechten Teiler.*

2, 4 und 6 ihre *echten Teiler.*

Wie war die Teilbarkeit bei Primzahlen definiert???

Eine **Primzahl** ***hat nur unechte Teiler!***

Beispiel: 61 ist eine Primzahl $T_{61} = \{1, 61\} \quad 2\ Elemente$

Definition:

Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ heißt **Primzahl** wenn sie **keine echten Teiler besitzt (also nur unechte Teiler!!)**

Eine Primzahl hat nur **1** und **sich Selbst** als Teiler. (ist nur durch 1 und sich selbst teilbar)

Beachte: **0 und 1 sind keine Primzahlen!!!!**

Deshalb in der Definition $p \geq 2$

Die kleinste (gerade) Primzahl ist daher laut Definition 2. Sie ist auch die **einzige gerade Primzahl.**

Wir versuchen nun eine beliebige Zahl, zum Beispiel die Zahl 48 in ein Produkt von Zahlen zu zerlegen.

$48 = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Wir sehen: zunächst haben wir nach dem Einmaleins zerlegt und dann die einzelnen Faktoren noch immer weiter soweit als möglich zerlegt. Natürlich gibt es verschiedenste Möglichkeiten der Produktzerlegung .Einmal sind wir am „Ende“ angelangt.

Bei diesem „Ende“ der Zerlegung stellen wir fest: diese Zahlen als Faktoren sind alles **Primzahlen.**

$84 = 7 \cdot 12 = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$39 = 3 \cdot 13$ $\qquad$ $95 = 5 \cdot 19$

Wir kommen durch verschiedene Arten immer zum selben Ergebnis- es gilt ja das Vertauschungsgesetz bei der Multiplikation!

$96 = 6 \cdot 16 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\qquad$ $96 = 2 \cdot 48 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$96 = 4 \cdot 24 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \cdot 3$

Bei unserer Zerlegung tritt der Begriff der **Potenz** auf. Zahlen werden mit *sich selbst multipliziert*! Die Zahl **2 3mal mit sich selbst multipliziert= 2 Hoch 3** $= 2^3$

*Wir üben schon jetzt, was wir in der 3.Klasse genauer lernen werden: eine Potenz anzuschreiben***.**

Wir haben die Zahl jeweils in Faktoren aus Primzahlen zerlegt- wir haben eine **Primfaktorenzerlegung** durchgeführt. Diese gilt nur für Zahlen $n \geq 2$ und für solche, die *mehr als 2 Teiler* haben.

Ist die zu zerlegende Zahl eine Primzahl (diese hat ja nur 2 Teiler), können wir sie nur als ein Produkt von 1 mit sich selbst schreiben. Dies gilt nicht als Primfaktorenzerlegung

$97 = 1 \cdot 97$

Muster –Ü *Zerlege die Zahl 90 in Primfaktoren!* Um eine übersichtlichere Darstellung für die später folgende Ermittlung von ggT und kgV zu haben, schreiben wir die Zerlegungen in Spalten an. (*hier ist diese durch erklärenden Text unterbrochen-unten ist sie vollständig angeführt.)*

$90|2$

Wir dividieren zunächst durch die **kleinste Primzahl** ,die in 84 enthalten ist. (meist ist es der 2er!!!).**Der erste Versuch ist immer mit 2** ! Ist die Zahl nicht durch 2 teilbar, probieren wir es mit 3 (oder 5) .(warum nicht mit 4??) .Bei unseren „Versuchen“ wenden wir die **Teilbarkeitsregeln** unserer vorigen chili Nr.003 (Teilbarkeitsregeln) an!!!

90 ist also durch 2 teilbar, weil die Einerziffer eine 0 ist.

Wir schreiben den 2er in die rechte Spalte. Das Ergebnis (der Quotient) kommt in die linke Spalte als nächste Zeile.

$45|3$

45 ist nur durch 3 teilbar. Weil Ziffernsumme=9. 3 teilt 9! Wenn 2 nicht möglich als Teiler ist, probieren wir es mit 3.

$15|3$

15 wäre auch durch 5 teilbar. Wir nehmen aber die kleinste Primzahl-also hier 3 !!!

$5|5$

5 ist nur mehr durch sich selbst teilbar. (eine Primzahl)

1

Am Ende in der linken Spalte 1 anschreiben.

Achtung!! Aus Erfahrung wissen wir, dass SchülerInnen oft 0 anschreiben. Das ist falsch!!!!

Jede Zahl geteilt durch sich selbst ergibt 1.

Also haben wir die Primfaktorenzerlegung:

$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ schreibe die Faktoren nach der Größe beginnend mit dem kleinsten an!

90	**2**
45	**3**
15	**3**
5	**5**
1	

Primzahlen bis 100 sind: (du solltest viele von ihnen können, damit du dir leichter beim Kürzen und Dividieren tust!!)

2 ,3 ,5, 7, 11, 13, 17 ,19, 23 ,29, 31,37,41 ,43,47, 53,59,61,67,71,73,79,83,89,97

Hiiiilffffee!!!!
ich bin nur durch mich und 1 teilbar!!

Zwischen 0 und 100 gibt es 25 Primzahlen.

Zwischen 90 und 100 gibt es nur eine Primzahl.(97)

Die meisten Primzahlen gibt es mit der Einerziffer 3 .(7 Zahlen)

(*als Einerziffer wird hier auch die einstellige Zahl,die nur aus der Ziffer besteht,mitgezählt!!*)

Die zweitmeisten mit der Einerziffer 7 (6 Zahlen)

die drittmeisten mit der Einerziffer 1 sowie 9 (5 Zahlen),

Mit der Einerziffer 2 und 5 treten nur die Zahlen 2 und 5 *als Zahl selbst* auf.

4,6,8 und …0 treten nie auf.

91 ist keine Primzahl!!! (durch 7 und 13 teilbar, wird gerne als eine solche eingeschätzt)

87 auch nicht (3*29)

Je *höher* die Zahlen werden, desto *weniger* Primzahlen treten auf!

Beachte: Manche Zahlen, von denen du meinst, es wären Primzahlen, sind durch 3 teilbar, weil die Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.

Bestimmung dieser Primzahlen mittels *<u>Sieb von Eratosthenes</u>* (siehe letztes Blatt !) einfach durchführbar.

Primzahlen bis 500:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103,

107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211,

223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331,

337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449,

457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499

DIE AKTUELLE GRÖSSTE GEFUNDENE PRIMZAHL LAUTET $2^{32582657} - 1$.

SIE HAT 9 808 358 ZIFFERN !!!!!

(STAND: 2008)

SOLCHE PRIMZAHLEN WERDEN MIT SOGENANNTEN SUPERCOMPUTERN ERMITTELT.

Das Sieb des Eratosthenes

Ist eine kulinarische Methode,um **alle Primzahlen zwischen 1 und 100 zu finden!**

Eratosthenes, ein griechischer Mathematiker (275-195 vor Christus) ,Küchenchef der „Nouvelle Grec cuisine mathematique de Kebabburger"und Besitzer des 1.Fast Food Restaurants, liebte es, mit scharfen Primzahlgewürzen Speisen (vor allem Zahlenburger und Primzahlnuggets süß-sauer) zuzubereiten.

Sein Sieb war ein unerreichtes Utensil für Primzahlgerichte mit Zahlensalat.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Geheimrezept:

1.) Streiche den 1er (1 ist keine Primzahl)
2.) Markiere den 2er und streiche dann alle **Vielfachen von 2** durch (also 4,6,8,10,12,14,....).Führe dies mit <u>*senkrechten Strichen*</u> durch!!!
3.) Markiere den 3er und streiche alle weiteren **Vielfachen von 3** durch <u>*schräge Striche*</u>
4.) <u>*Setze für die Zahlen 5 und 7 wie in Schritt 2.) und 3.)fort!*</u>
<u>*Übrig in der Tabelle bleiben 25 Primzahlen!!! (sieheSeite 4) Guten Appetit!!!*</u>

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **005**

ggT

Der größte gemeinsame Teiler - ggT

Wissensleuchtturm

2.Klasse

Primfaktorenzerlegung

Der größte gemeinsame Teiler

ggT

Was kann der Begriff „Größter gemeinsamer Teiler“ bedeuten? Dem Wort nach muss es also unter allen Teilern gemeinsame Teiler geben und unter diesen muss ein größter existieren.

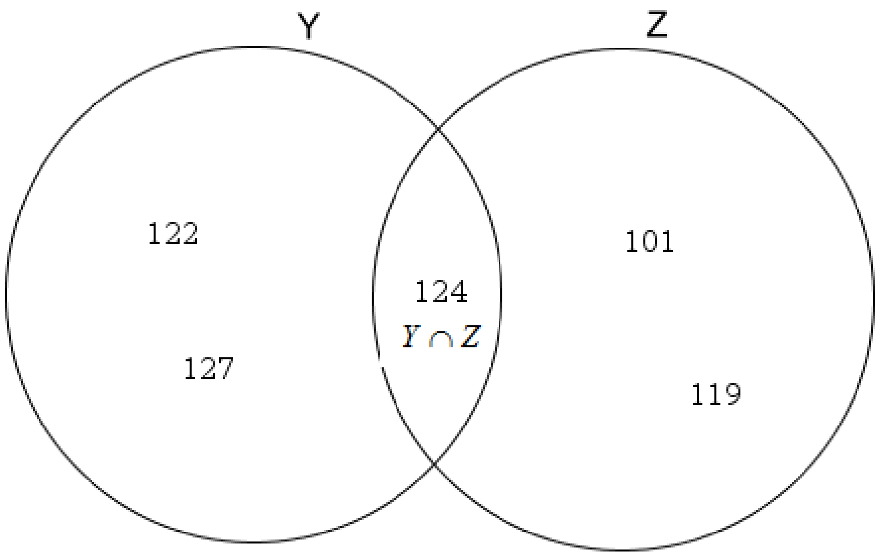
Wir wollen nun auch noch das Wort „gemeinsam“ mathematisch umsetzen:

Dazu definieren wir den mathematischen **Durchschnitt** anhand eines Beispiels:

$$Y = \{122, 124, 127\} \quad Z = \{101, 119, 124\} \qquad Y \cap Z = \{124\}$$

In der Durchschnittsmenge liegen jene Elemente, die in **beiden** Mengen enthalten sind. **124 ist in beiden Mengen gemeinsam**. Wir können in den Mengenklammern jene Elemente unterstreichen, die in beiden Klammern vorkommen. Also insgesamt jene Elemente, die doppelt vorkommen. Hier kommt nur ein Element doppelt vor- nämlich 124.

Dazu die graphische Veranschaulichung mittels Mengendiagramm:

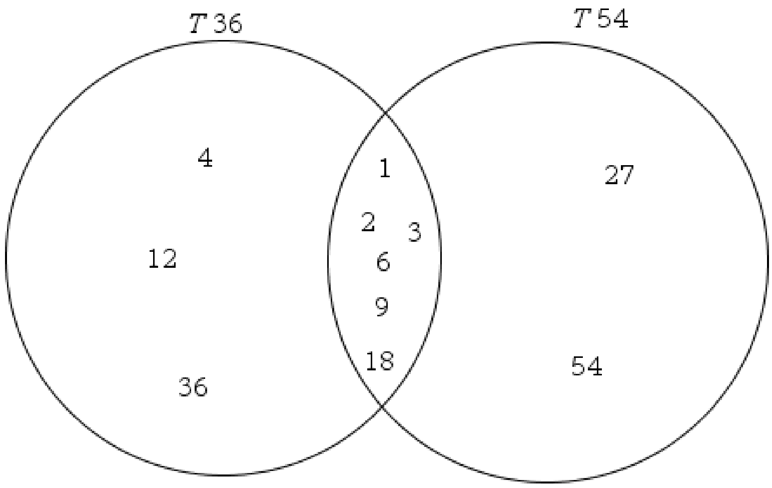


Der überlappende Schnittbereich stellt den Durchschnitt dar. In diesem Fall liegt nur das Element 124 im Durchschnitt.

Wir bestimmen die Teilermengen von 36 und 54 :

$T_{36} = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ $T_{54} = \{1,2,3,6,9,18,27,54\}$

In der Durchschnittsmenge liegen jene Elemente, die in **beiden** Mengen enthalten sind.
1,2,3,6 ,9 und 18 sind in beiden Mengen gemeinsam. Diese Elemente sind die gemeinsamen Teiler.



$T_{36} \cap T_{54} = \{1,2,3,6,9,18\}$

Unter diesen gemeinsamen Teilern gibt es nun den größten (gemeinsamen Teiler).

Dieser ist logischerweise 18,weil dies die größte (höchste) Zahl ist.

Wir schreiben**:** **ggT (36,54)=18. lies: ggT von 36 und 54**

Es gibt also keine größere Zahl als 18, die sowohl in 36 als auch in 54 als Teiler enthalten ist.

Der ggT existiert auch für *mehr als 2 Zahlen*.

Die Methode mittels Teilermengen den Durchschnitt zu bestimmen und das größte Element dort herauszufinden, ist eine zulässige Methode, aber nicht die beste.

Besser ist die Bestimmung des *ggT mittels Primfaktorenzerlegung einheitlich in Spalten.(siehe nächstes Blatt!)*

Wir zerlegen 36 und 54 in Primfaktoren.

36	**2**	54	**2**
18	**2**	27	**3**
9	**3**	9	**3**
3	**3**	3	**3**
1		1	

Oben: *Wir vergleichen jeweils die beiden rechten roten Spalten (also die Divisoren) in beiden Zerlegungen links und rechts.*

1.Schritt : wir beginnen mit dem ersten roten 2er in der linken Zerlegung. Er kommt doppelt, also auch in der rechten Spalte vor. Wir markieren ihn oder umkreisen ihn .Hier markieren wir ihn grün. (siehe unten) In der rechten Spalte wird er abgehakt. Hier markieren wir ihn violett. Der 2er wird nur einmal gezählt.

36	**2**	54	**2**
18	**2**	27	**3**
9	**3**	9	**3**
3	**3**	3	**3**
1		1	

2.Schritt : wir gehen weiter in der linken Zerlegung. Der nächste 2er kommt nirgendwo mehr vor. Wir lassen ihn nicht markiert/nicht umkreist stehen. Oben markieren wir ihn hellblau.

3.Schritt : wie schon im 1.Schritt gehen wir bei den beiden 3ern vor. Oben markieren wir die beiden 3er in der linken Zerlegung grün ,die beiden 3er in der rechten Zerlegung wie im 1.Schritt violett.

Übrig bleibt nun (nur)ein 3er in der rechten Spalte der rechten Zerlegung (rot markiert).Er kommt nicht (mehr) doppelt vor ,daher wird er stehen gelassen.

***Übrig bleibt nun ein 2-er und zwei 3-er in der linken Zerlegung-rechte Spalte**. (grün!!)*

Bilden wir das Produkt aus diesen übrig gebliebenen grünen Zahlen ,so erhalten wir die Faktoren des ggT.

$$\boxed{ggT\,(36{,}54) = 2\cdot 3\cdot 3 = 2\cdot 3^2 = 18}$$

Der größte gemeinsame Teiler von 36 und 54 ist also,wie bereits mit den Mengen gezeigt, 18!

Der größte gemeinsame Teiler ist das Produkt aller gemeinsamen Primfaktoren.

„Alle Zahlen, die doppelt vorkommen=alle Primfaktoren in der Zerlegung, werden nur 1mal multipliziert angeschrieben.“

Nun noch ein **Musterbeispiel:**

Bestimme den ggT von 60 und 15 ggT(60,15)

Wir zerlegen 60 und 15 in Primfaktoren.

60	2	15	3
30	2	5	5
15	3	1	
5	5		
1			

Oben: *Wir vergleichen jeweils die beiden rechten roten Spalten (also die Divisoren) in beiden Zerlegungen links und rechts.*

1.Schritt : wir beginnen mit dem ersten roten 2er in der linken Zerlegung. Er kommt nicht doppelt, also nicht in der rechten Spalte vor. Wir lassen ihn nicht markiert/nicht umkreist stehen. Unten markieren wir ihn hellblau (siehe unten)

60	2	15	3
30	2	5	5
15	3	1	
5	5		
1			

2.Schritt : wir gehen weiter in der linken Zerlegung. Auch der nächste 2er kommt nirgendwo mehr vor. Wir lassen ihn nicht markiert/nicht umkreist stehen. Oben markieren wir ihn hellblau.

3.Schritt : Nun kommen wir zum 3-er.Der 3er kommt doppelt, also auch in der rechten Spalte vor. Wir markieren ihn oder umkreisen ihn .Hier markieren wir ihn grün. In der rechten Spalte wird er abgehakt. Hier markieren wir ihn violett. Denselben Vorgang führen wir für den 5-er durch. Nun sind wir damit alle Elemente auch in der rechten Spalte durchgegangen..

***Übrig bleibt nun ein 3-er und ein 5-er in der linken Zerlegung-rechte Spalte**. (grün!!)*

Bilden wir das Produkt aus diesen übrig gebliebenen grünen Zahlen ,so erhalten wir die Faktoren des ggT.

$$\boxed{ggT(60,15) = 3 \cdot 5 = 15}$$

Definition:

2 oder mehrere Zahlen, die nur 1 als größten gemeinsamen Teiler haben, nennen wir **teilerfremd oder relativ prim**.

Logischerweise sind alle Primzahlen teilerfremd, wenn wir den ggT zweier Primzahlen bestimmen wollen.

Beispiel: ggT (37,47)= 1

37	**37**	47	**47**
1	**1**	1	**1**
1		1	

oder: ggT (47,97)= 1

Aber auch Zahlen, die keine gemeinsamen Primfaktoren außer 1 haben,sind relativ prim.

In erster Linie also 2 Zahlen, deren ggT wir bestimmen wollen, die sich in eine reine Potenz zerlegen lassen(also immer dieselbe Zahl =derselbe Primfaktormit sich selbst entsprechend multipliziert wird z.B. 3mal3 mal 3 mal 3 mal 3 mal 3)

64	**2**	81	**3**
32	**2**	27	**3**
16	**2**	9	**3**
8	**2**	3	**3**
4	2	1	**1**
2	2	1	
1	**1**		
1			

ggt(64,81)=1

$\boxed{64 = 2^6 \quad 81 = 3^4}$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **006**

Das kleinste gemeinsame Vielfache - kgV

2.Klasse

Primfaktorenzerlegung Das kleinste gemeinsame Vielfache kgV

Was kann der Begriff „Kleinstes gemeinsames Vielfaches“ bedeuten? Dem Wort nach muss es also unter allen Vielfachen gemeinsame Vielfache geben und unter diesen muss ein kleinstes existieren.

Wir wollen nun auch noch das Wort „gemeinsam“ mathematisch umsetzen:

(siehe auch dazu Chili Nr.005-ggT- hier nun ein anderes Beispiel)

Dazu definieren wir den mathematischen **Durchschnitt** anhand eines Beispiels:

$R = \{4,17,19,33,44,55,66,67,84,89,97\} \quad S = \{Menge\ aller\ Primzahlen\ \ p \geq 2\}$

$\Rightarrow R \cap S = \{17,19,67,89,97\}$

Die Menge R beinhaltet also 11 Elemente.

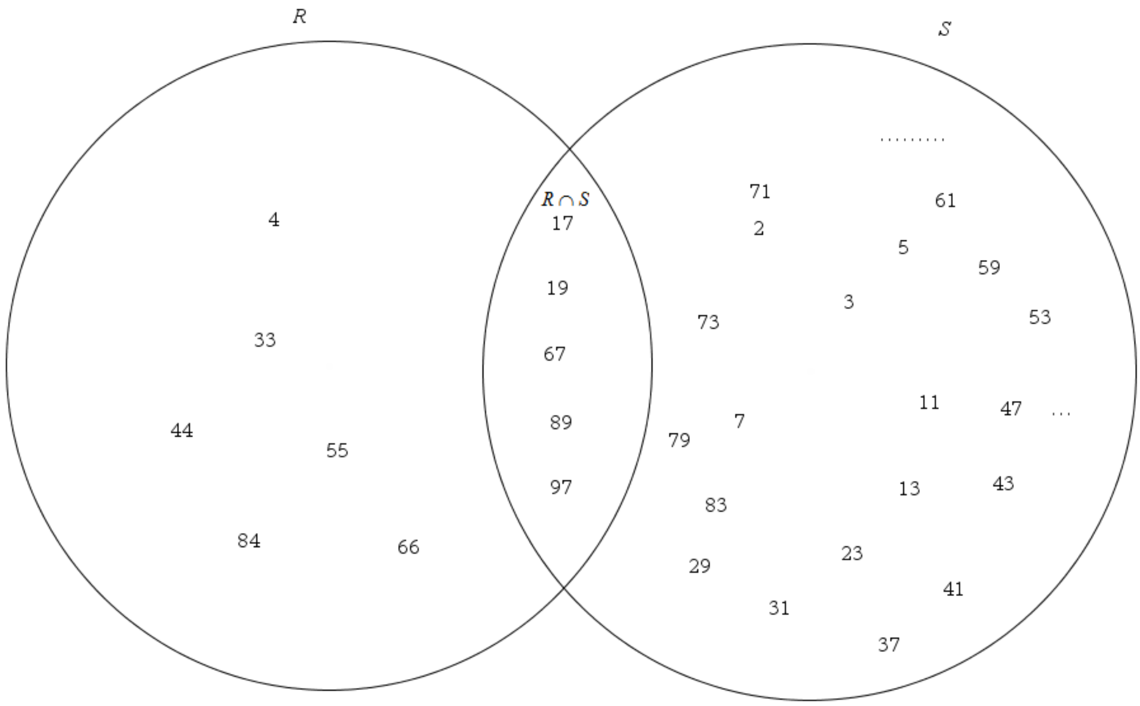
In der Durchschnittsmenge liegen jene Elemente, die in **beiden** Mengen enthalten sind .Die Elemente **17,19,67,89,97 sind in beiden Mengen gemeinsam**. Wir schreiben die Menge S anders an:

$S = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,...\}$

Die Menge S beinhaltet also unendlich viele Elemente ,da ja Euklid bereits nachwies, dass es *unendlich viele* Primzahlen gibt.

Nun können wir in den Mengenklammern jene Elemente unterstreichen, die in beiden Klammern vorkommen. Also insgesamt jene Elemente, die doppelt vorkommen. Die Elemente 17,19,67,89,97 sind in beiden Mengen gemeinsam

Dazu die graphische Veranschaulichung mittels Mengendiagramm:



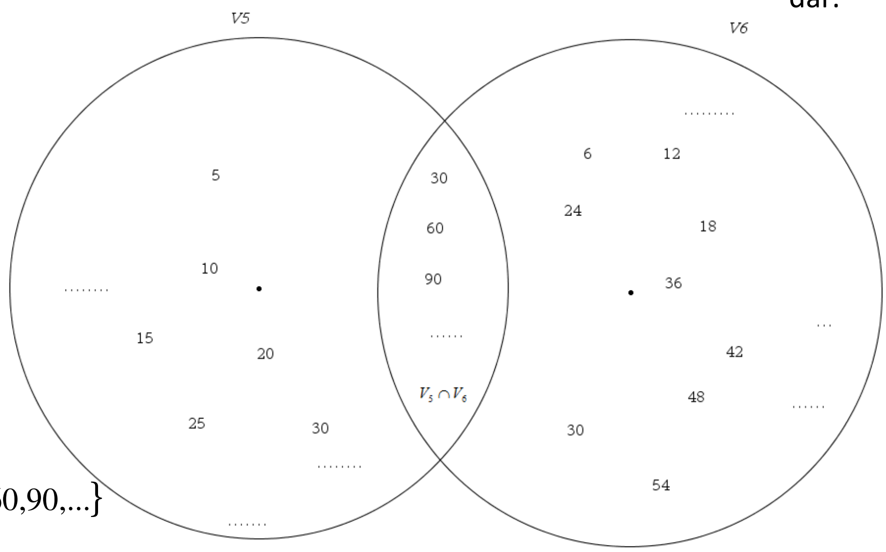
Als anschauliches Beispiel bestimmen wir die Vielfachenmengen von 5 und 6 :

$V_5 = \{5,10,15,20,25,30,35,40,45,...\}$ $\qquad$ $V_6 = \{6,12,18,24,30,36,42,48,...\}$

Beachte: Im Unterschied zur Teilermenge musst du bei der Vielfachenmenge *am Ende einen Beistrich und 3 Punkte setzen!!!!!,* da es ja <u>unendlich viele</u> Vielfache gibt, aber nur endlich viele (eine beschränkte Menge) Teiler.

In der Durchschnittsmenge liegen jene Elemente, die in **beiden** Mengen enthalten sind.

Die gemeinsamen Vielfachen (also der Durchschnitt) stellt die Menge $\{30,60,90,...\}$ dar.



$V_5 \cap V_6 = \{30,60,90,...\}$

Unter diesen gemeinsamen Vielfachen gibt es nun das *kleinste* gemeinsame Vielfache.

Dieses ist logischerweise 30, weil dies die kleinste (niedrigste) Zahl ist.

Wir schreiben: **kgV (5,6)=30. lies: kgV von 5 und 6**

Es gibt also keine kleinere Zahl als 30, die sowohl ein Vielfaches von 5, als auch ein Vielfaches von 6 ist.

Das kgV existiert auch für *mehr als 2 Zahlen*.

Die Methode mittels Vielfachenmengen den Durchschnitt zu bestimmen und das kleinste Element dort herauszufinden, ist eine zulässige Methode, aber nicht die beste.

Unserer Meinung nach besser ist die Bestimmung des <u>*kgV-ähnlich dem ggT- mittels Primfaktorenzerlegung einheitlich in Spalten. Anhand eines anderen Musterbeispiels zeigen wir dies nun auf dem nächsten Blatt.*</u>

Gesucht ist kgV (12,30). *Wir zerlegen 12 und 30 in Primfaktoren.*

12	**2**	30	**2**
6	**2**	15	**3**
3	**3**	5	**5**
1		1	

Oben: *Wir vergleichen jeweils die beiden rechten roten Spalten (also die Divisoren) in beiden Zerlegungen links und rechts.*

1.Schritt : wir beginnen mit dem ersten roten 2er in der linken Zerlegung. Er kommt doppelt, also auch in der rechten Spalte vor. Wir markieren ihn oder umkreisen ihn .Hier markieren wir ihn grün. (siehe unten) In der rechten Spalte wird er abgehakt. Hier markieren wir ihn violett. Der 2er wird nur einmal gezählt.

12	**2**	30	**2**
6	**2**	15	**3**
3	**3**	5	**5**
1		1	

2.Schritt : wir gehen weiter in der linken Zerlegung. Der nächste 2er kommt nirgendwo mehr vor. Wir lassen ihn nicht markiert/nicht umkreist stehen. Oben markieren wir ihn hellblau.

3.Schritt : wie schon im 1.Schritt gehen wir mit dem 3-er vor. Oben markieren wir den 3er in der linken Zerlegung grün ,die beiden 3er in der rechten Zerlegung wie im 1.Schritt violett.

Übrig bleibt nun (nur)ein 5er in der rechten Spalte der rechten Zerlegung (rot markiert).Er kommt nicht (mehr) doppelt vor ,daher wird er stehen gelassen.

*Wie beim ggT werden die doppelt vorkommenden Elemente (also jene die in der linken und rechten Zerlegung vorkommen)nur 1mal multiplizierend mitgezählt angeschrieben ,**aber im Unterschied zum ggT werden beim kgV nun auch die Faktoren, die „solo übrig bleiben in beiden Zerlegungen“-der hellblaue 2 er links sowie der rote 5-er rechts -multiplizierend mitgezählt angeschrieben!!!!!!** Alle violetten Zahlen werden also nicht gezählt!!!(weil sie als doppelt nur 1mal gezählt werden!)*

$kgV(12{,}30) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ *Das kleinste gemeinsame Vielfache von 12 und 30 ist also 60.*

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Produkt aller gemeinsamen Primfaktoren und einem gewissen Rest dazu:„Alle Zahlen, die doppelt vorkommen=alle Primfaktoren in der Zerlegung, werden nur 1mal multipliziert angeschrieben, der Rest,der übrig bleibt,wird auch mitgezählt (selbst wenn er nicht doppelt vorkommt)“

Nun noch ein **Musterbeispiel:**

Bestimme das kgV von 30 und 40 kgV(30,40)

Wir zerlegen 30 und 40 in Primfaktoren.

30	**2**	40	**2**
15	**3**	20	**2**
5	**5**	10	**2**
1		5	**5**
1		1	

Oben: *Wir vergleichen jeweils die beiden rechten roten Spalten (also die Divisoren) in beiden Zerlegungen links und rechts.*
1.Schritt : wir beginnen mit dem ersten roten 2er in der linken Zerlegung. Er kommt doppelt, also auch in der rechten Spalte vor. Wir markieren ihn oder umkreisen ihn .Hier markieren wir ihn grün. (siehe unten) In der rechten Spalte wird er abgehakt. Hier markieren wir ihn violett.
Der 2er wird nur einmal gezählt.

30	**2**	40	**2**
15	**3**	20	**2**
5	**5**	10	**2**
1		5	**5**
		1	

2.Schritt Der nächste 3er kommt nirgendwo mehr vor. Wir lassen ihn nicht markiert/nicht umkreist stehen. Oben markieren wir ihn hellblau.

3.Schritt : Nun kommen wir zum 5-er.Der 5er kommt doppelt, also auch in der rechten Spalte vor. Wir markieren ihn oder umkreisen ihn .Hier markieren wir ihn grün. In der rechten Spalte wird er abgehakt. Hier markieren wir ihn violett. Der 5er wird nur 1mal gezählt.

Alle violetten Zahlen werden also nicht gezählt!!!(weil sie als doppelt nur 1mal gezählt werden!)

Übrig bleibt nun der 3-er in der linken Zerlegung und zwei 2-er rechts.(orange und rot)

Bilden wir das Produkt aus diesen doppelten nur 1mal gezählten und übrig gebliebenen grünen Zahlen ,so erhalten wir die Faktoren des kgV

$$\boxed{kgV(30,40) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120}$$

Der Zusammenhang zwischen Teiler und Vielfachem:

Beispiel:

7 ist Teiler von 49 (56) $\boxed{\Leftrightarrow}$ 49 (56) ist ein Vielfaches von 7

$7|49 \quad t|a$ $\qquad 49 = 7 \cdot 7 \quad a = t \cdot n$

$7|56 \quad t|a$ $\qquad 56 = 7 \cdot 8 \quad a = t \cdot n$

Es gilt also allgemein: $\left| \quad t|a \quad a \text{ ist durch } t \text{ teilbar} \qquad a = t \cdot n \quad a \text{ ist Vielfaches der Zahl } t \right.$

Beachte den Unterschied ggT- kgV!!!!

ggT: *der violette 2-er und der violette 3-er werden als doppelte Faktoren nur 1mal gezählt.*

*Der hellblaue2-er und der rote 5-er werden stehen gelassen und **nicht mitgezählt.***

kgV: *der violette 2-er und der violette 3-er werden als doppelte Faktoren nur 1mal gezählt.*

*Der hellblaue2-er und der rote 5-er werden **miteinander multiplizierend mitgezählt.***

12	**2**	30	**2**
6	**2**	15	**3**
3	**3**	5	**5**
1		1	

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **007**

Rechnen mit Brüchen Einführung-Teil 1

Teile eines Ganzen

weiterführende erste Grundüberlegungen:

Addieren gleichnamiger Brüche, Multiplikation eines Bruchs mit einer ganzen Zahl, KÜRZEN; Brüche und Dezimalzahlen

Wissensleuchtturm

Rechnen mit Brüchen Einführung-Teil 1

Teile eines Ganzen

WEITERFÜHRENDE ERSTE GRUNDÜBERLEGUNGEN:

ADDIEREN GLEICHNAMIGER BRÜCHE, MULTIPLIKATION EINES BRUCHS MIT EINER GANZEN ZAHL, KÜRZEN; BRÜCHE UND DEZIMALZAHLEN

In einen zuvor leeren Trinkbehälter des „Kebab Freshbörger Kings“ wird Cola-Citro-Limo eingefüllt.

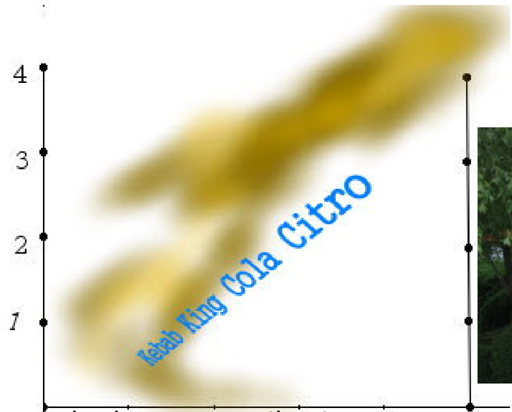


Foto C by JZ

Die 4 Randmarkierungen bedeuten: 4 Teile eines Ganzen. Der Abstand von einer Markierung bis zur nächsten ist natürlich immer gleich groß.

„Das Ganze“ bedeutet „voller Behälter“ vollgefüllt bis zur Markierung Nr.4.

Anders ausgedrückt: „ganz voll“-> 4 mal wurde immer ein Teil von 4 Teilen befüllt, also ein Viertelteil.

4 mal ein Viertelteil ist dann das Ganze.

Ein Teil von 4 ,ein Viertelteil $=\frac{1}{4}$. 4 mal der Viertelteil= 1 Ganzes=1 $4\cdot\frac{1}{4}=1$

Das Cola-Citro wird also etappenweise in Teilen eingefüllt. Einmal bis zur 1.Markierung,dann bis zur 2.,dann zur 3.und schließlich zur 4.

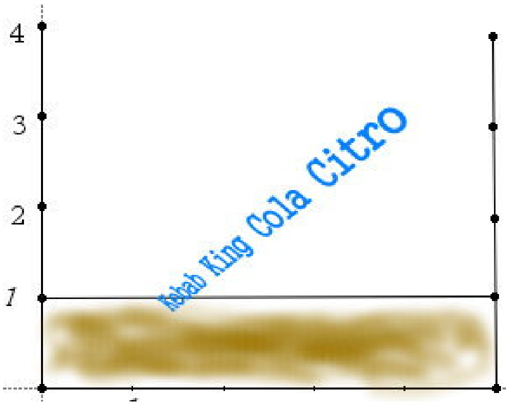
WH: Der Bruchstrich ist ein Divisionszeichen 1:4 $=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$

1……**Zähler** (Zahl, die oberhalb des Bruchstrichs steht)

4……**Nenner** (Zahl, die unterhalb des Bruchstrichs steht)

Die Cola-limo ist bis zur *1.Markierung* vollgefüllt. Es ist ein Viertel/ ein Viertelteil eingefüllt.

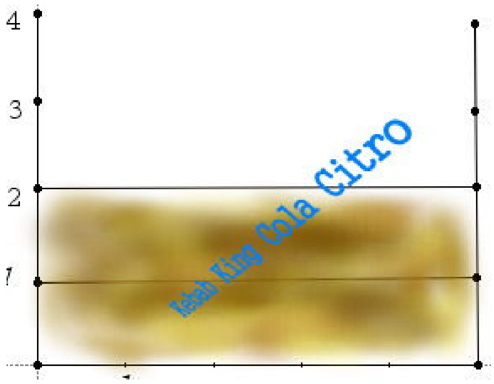


$\frac{1}{4}$ der gesamten Colamenge, die in den Behälter passt, ist also eingefüllt.

Aus der 1.Klasse bzw. von früher wissen wir :Der Bruchstrich bedeutet „Dividieren“

$1:4=0{,}25$ $\frac{1}{4}=0{,}25$ als Dezimalzahl.

Die Cola-limo ist bis zur *2.Markierung vollgefüllt*. Es sind zwei Viertel/ 2 Viertelteile eingefüllt.



$\frac{2}{4}$ der gesamten Limo-menge, die in den Behälter passt, ist also eingefüllt.

Aus der 1.Klasse bzw. von früher wissen wir : Der Bruchstrich bedeutet „Dividieren“

$2:4=0{,}5$ $\frac{2}{4}=0{,}5$ als Dezimalzahl.

Wir sehen in der Graphik: der Behälter ist schon ***zur Hälfte*** mit Cola-limo vollgefüllt. Daher müssen $\frac{2}{4}=0{,}5=\frac{1}{2}$

sein!!!!

Was ist geschehen??? Der 2er ist „von selbst“ „oben“ im Zähler zu einem 1er geworden und der 4er zu einem 2er.

Später werden wir dann gleich sehen: Wir haben den Bruch **gekürzt.** $aus \frac{2}{4} \quad wurde \quad \frac{1}{2}$.

Wir haben *<u>durch 2 gekürzt, also den Zähler und den Nenner durch 2 dividiert</u>*.

Nun drücken wir den Bruch als Dezimalzahl aus und schreiben ihn in Zehntel an.

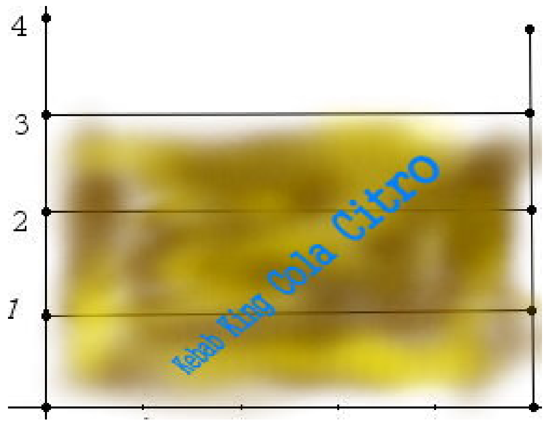
Wir wissen von den vorigen Überlegungen (der Behälter ist zur Hälfte vollgefüllt) dass $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Also folgt : $\frac{2}{4} = 0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Lesen wir von links nach rechts, haben wir den 1.Bruch $\frac{2}{4}$ auf $\frac{1}{2}$ **gekürzt**. Wir haben im Zähler und im Nenner durch 2 *<u>dividiert.</u>*

Lesen wir von rechts nach links, haben wir den Bruch $\frac{1}{2}$ auf $\frac{2}{4}$ **erweitert**. Wir haben im Zähler und im Nenner mit 2 *<u>multipliziert.</u>*

Die Cola-limo ist bis zur **3.Markierung** vollgefüllt. Es sind drei Viertel/ 3 Viertelteile eingefüllt.



$\frac{3}{4}$ der gesamten Limomenge, die in den Behälter passt, ist also eingefüllt.

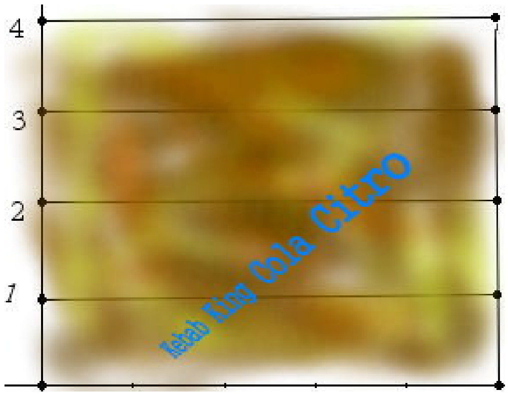
Aus der 1.Klasse bzw. von früher wissen wir : Der Bruchstrich bedeutet „Dividieren“

$3:4 = 0{,}75 \qquad \frac{3}{4} = 0{,}75$ als Dezimalzahl.

Beachte : die entsprechende Dezimalzahl ist immer kleiner als 1, also „Null komma“.

Bei 1 wären ja alle 4 Markierungen mit Wasser befüllt,der Behälter dann ganz voll.

Die Cola-limo ist bis zur *4.Markierung vollgefüllt*. Es sind vier Viertel/ 4 Vierteltteile eingefüllt.



$\frac{4}{4}$ der gesamten Limomenge, die in das Behälter passt, ist also eingefüllt.

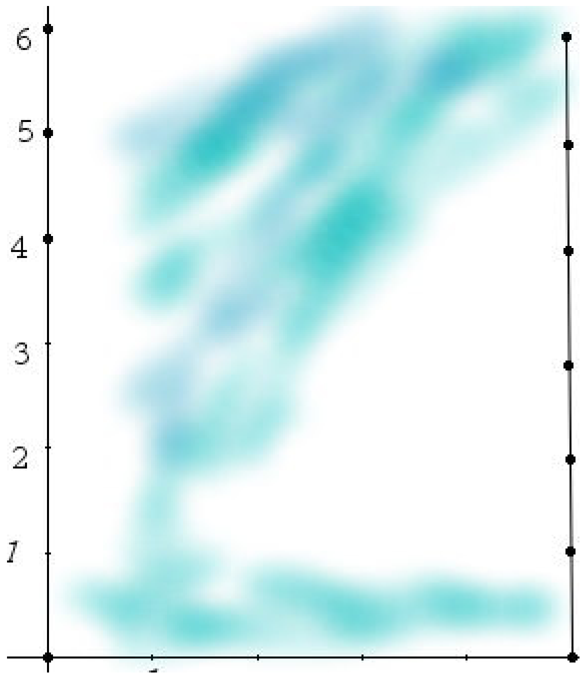
Aus der 1.Klasse bzw. von früher wissen wir : Der Bruchstrich bedeutet „Dividieren“

$4:4=1 \quad \frac{4}{4}=1=1{,}0$ als Dezimalzahl.

Wir bemerken: $\frac{4}{4}=4\cdot\frac{1}{4}=1$ Offensichtlich wird der Vierer mit dem Einser multipliziert

Ein Bruch mit einer ganzen Zahl scheint so multipliziert zu werden, dass (nur!)der Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert wird. Näheres im Detail dazu später.

Überlegen wir den selben Vorgang des Befüllens für ein Tauchbecken mit 6 Randmarkierungen. Also 6 Beckenteilen. Der Abstand von einer Randmarkierung zur nächsten sei immer gleich groß. *Das Tauchbecken der Copa Kebabana wird zu Saisonbeginn völlig neu mit Wasser befüllt.*



Zeichne die Wasserstände jeweils in das Becken ein!!

1.Wasserstand: (bis zur Markierung 1): das Becken ist nur bis zur 1.Markierung vollgefüllt.Es ist ein Sechstel,ein Sechstelteil vollgefüllt. $\frac{1}{6}$

2.Wasserstand: (bis zur Markierung 2das Becken ist nur bis zur 2.Markierung vollgefüllt.Es sind 2 Sechstel, 2 Sechstelteile vollgefüllt. $\frac{2}{6}$

Ergänze nun selbst die Formulierung der Wasserstände bis zur Markierung 3,4 und 5!!!

6.Wasserstand: (bis zur Markierung 6):das Becken ist komplett vollgefüllt. Es sind 6 Sechstel, 6 Sechstelteile vollgefüllt. $\frac{6}{6}=1$ Ein Ganzes. Es ist ja voll.

Überlegen wir: Wann ist das Tauchbecken halb (zur Hälfte) vollgefüllt???

Wenn das Wasser bei der Markierung 3 steht,ist das Becken *halb voll.*

Es muss also $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ sein. Was ist vom ersten Bruch zum zweiten geschehen??

Wie kommen wir von 3 auf 1??? Und von 6 auf 2??? Es wurde also „automatisch" in Zähler und Nenner, „oben und unten" im Bruch durch 3 dividiert. Wir haben den Bruch *durch 3* **gekürzt**.

2.Wasserstand: (bis zur Markierung 2das Becken ist nur bis zur 2.Markierung vollgefüllt.Es sind 2 Sechstel, 2 Sechstelteile vollgefüllt. $\frac{2}{6}$

Die Befüllung bis zur 2.Markierung entstand, indem zu einem Sechstelteil noch ein Sechstelteil dazu addiert wurde.

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=2\cdot\frac{1}{6}$ andere Schreibweise: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1+1}{6}=\frac{2}{6}$ ein längerer Bruchstrich

Beobachten wir den Wasserstand genau,sehen wir: es ist genau **ein Drittel** des gesamten Beckens mit Wasser befüllt.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Wir merken aufgrund der vorigen Überlegungen: der Bruch $\frac{2}{6}$ wurde durch 2 gekürzt,also in Zähler und Nenner durch 2 dividiert. Ergebnis ist also $\frac{1}{3}$

Die Zahlen 2 und 6 haben den gemeinsamen Teiler 2, es ist dies der ggT!!! (Überprüfe!)

Kürzen muss daher also mit dem ggT zusammenhängen!!!

Die Befüllung bis zur 3.Markierung entstand, indem 3 Sechstelteile addiert wurden,oder zu 2 Sechstelteilen noch ein Sechstelteil dazu addiert wurde…

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=3\cdot\frac{1}{6}$ Wir sehen: es sind $\frac{1}{2}$ (die Hälfte) des Beckens voll.

Wir merken aufgrund der vorigen Überlegungen: der Bruch $\frac{3}{6}$ wurde durch 3 gekürzt ,also in Zähler und Nenner durch 3 dividiert. Ergebnis ist also $\frac{1}{2}$

Die Zahlen 3 und 6 haben den gemeinsamen Teiler 3, es ist dies der ggT!!! (Überprüfe!)

Kürzen muss mit dem ggT zusammenhängen!!!

Die Befüllung bis zur4.Markierung entstand, indem 4 Sechstelteile addiert wurden,oder zu 3 Sechstelteilen noch ein Sechstelteil dazu addiert wurde.

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=\frac{1+1+1+1}{6}=4\cdot\frac{1}{6}$ Wir sehen: es sind $\frac{2}{3}$ des Beckens voll.

Wir merken aufgrund der vorigen Überlegungen: der Bruch $\frac{4}{6}$ wurde durch 2 gekürzt ,also in Zähler und Nenner durch 2 dividiert. Ergebnis ist also $\frac{2}{3}$

Die Zahlen 4 und 6 haben den gemeinsamen Teiler 2, es ist dies der ggT!!! (Überprüfe!)

Kürzen muss mit dem ggT zusammenhängen!!!

Die Befüllung bis zur5.Markierung entstand, indem 5 Sechstelteile addiert wurden,oder zu 4 Sechstelteilen noch ein Sechstelteil dazu addiert wurde.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}=\frac{1+1+1+1+1}{6}=5\cdot\frac{1}{6}$$

Wir können nicht kürzen, da aufgrund der Teilbarkeitsregeln die Zahl 5 und 6 keinen gemeinsamen Teiler (außer 1) haben.

Die Befüllung bis zur6.Markierung entstand, indem 6 Sechstelteile addiert wurden,oder zu 5 Sechstelteilen noch ein Sechstelteil dazu addiert wurde.

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1=6\cdot\frac{1}{6}$ Wir sehen: das Becken ist voll.

$\frac{6}{6}=1=\frac{1}{1}$ *alle Ganzen und ganze Zahlen können immer als Eintel geschrieben werden!!!*

Wir merken aufgrund der vorigen Überlegungen: der Bruch $\frac{6}{6}$ wurde durch 6 gekürzt ,also der Zähler und Nenner durch 6 dividiert. Ergebnis ist also 1

Die Zahlen 6 und 6 haben den gemeinsamen Teiler 6, es ist dies der ggT!!! (Überprüfe!)

Kürzen muss mit dem ggT zusammenhängen!!!

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1=6\cdot\frac{1}{6}$ wird **Addieren von gleichnamigen Brüchen genannt**. Gleichnamig bedeutet, dass im Nenner **immer** dieselbe Zahl steht.

Wir haben bemerkt: Addieren von (gleichnamigen) Brüchen und Multiplizieren eines Bruchs mit einer ganzen Zahl und auch Kürzen hängen eng zusammen.

*Weiters beobachten wir: wenn wir gleichnamige Brüche addieren, lassen wir den Nenner gleich („schreiben ihn 1 mal an“) und **addieren nur die Zähler**.*

Wir wollen in den nächsten Kapiteln alles genau der Reihe nach betrachten.

Zusammenhang zwischen Addieren gleichnamiger Brüche, Multiplizieren eines Bruchs mit einer ganzen Zahl sowie Kürzen und Erweitern:

$$\frac{4}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

Lesen wir von links nach rechts, haben wir den 1.Bruch $\frac{4}{6}$ auf $\frac{2}{3}$ **gekürzt**. Wir haben im Zähler und im Nenner durch 2 *dividiert.* Um die **größtmöglichste** Zahl zu bestimmen,durch die wir kürzen können, wissen wir ja aufgrund der vorigen Überlegungen, dass wir den ggT bestimmen sollen.

(weil 2 der ggT von Zähler und Nenner ist)

Lesen wir von rechts nach links, haben wir den Bruch $\frac{2}{3}$ auf $\frac{4}{6}$ **erweitert**. Wir haben im Zähler und im Nenner mit 2 *multipliziert.*

oder:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1+1+1+1+1+1}{6}=\frac{6}{6}=1=6\cdot\frac{1}{6} \qquad \frac{6}{6}=1=\frac{1}{1}$$

Lesen wir von links nach rechts, haben wir im Zähler und im Nenner durch 6 *dividiert.(weil 6 der ggT von Zähler und Nenner ist)*

Lesen wir von rechts nach links, haben wir im Zähler und im Nenner mit 6 *multipliziert.*

Bemerkung: Bsp.: $\frac{78}{6}=13=\frac{13}{1}$ *alle Ganzen und ganze Zahlen können immer als Eintel geschrieben werden!!!*

Überlege: zum Kürzen:

Um die **größtmögliche** Zahl zu bestimmen, durch die wir kürzen können, wissen wir ja aufgrund der vorigen Überlegungen, dass wir den ggT bestimmen sollen.

Wir können $\frac{5}{6}$ nicht kürzen, da aufgrund der Teilbarkeitsregeln die Zahl 5 und 6 keinen gemeinsamen Teiler (außer 1) haben. Wir führen dies in der Primfaktorenzerlegung durch.

5	5	6	2
1	**1**	3	3
1		1	**1**

ggT=**1**

Dies bedeutet sind Zähler und Nenner eines Bruchs per Definition *teilerfremd (relativ prim),so können wir sie nicht durch dieselbe gemeinsame Zahl mehr in Zähler und Nenner dividieren.*

Erinnere dich:-> 2 Zahlen a und b sind <u>teilerfremd wenn ggT (a,b)=1</u>

Also: Sind 2 Zahlen,die im Zähler und Nenner eines Bruchs stehen, teilerfremd, d.h.

ggT (Zähler,Nenner)=1 , so ist der Bruch nicht (mehr) kürzbar, er ist nur durch 1 kürzbar, "was wir aber gar nicht sehen"

$$\frac{5 \to :1}{6 \to :1} \textit{kürzen} = \frac{5}{6}$$

Die nun genannte „Regel" ist natürlich im Allgemeinen für höhere Zahlen in Zähler und Nenner ,bei denen wir nicht wissen, durch welche Zahl diese teilbar sind, anzuwenden.

UNECHTER BRUCH, ECHTER BRUCH, UNEIGENTLICHER BRUCH

Was passiert nun, wenn wir mit unserem Addieren von gleichnamigen Brüchen im vorigen Beispiel, den Sechsteln, mehr als ein Ganzes erhalten??? d.h. beim Addieren "über ein Ganzes hinauskommen"???

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}=7\cdot\frac{1}{6}$$

$\frac{1}{6}$ ist ein **echter Bruch**: der Zähler ist kleiner als der Nenner!

Wir sehen: Bei $\frac{7}{6}$ ist die Zahl im Zähler(ober des Bruchstrichs) größer als die Zahl im Nenner.(unter des Bruchstrichs)

Von den Dezimalzahlen der 1.Klasse (*Mathe Chilled 1.Klasse*) kennen wir bereits den Begriff des unechten Bruchs: Bsp.: $\frac{541}{100}=5{,}41=5\frac{41}{100}$

Definition: Ein Bruch, dessen Zähler *größer als der Nenner* ist, heißt **unechter Bruch**.

Ein unechter Bruch kann stets als gemischte Zahl geschrieben werden

(„Ganze plus Bruch") Achtung Fälschung!

Wie ein unechter Bruch in eine gemischte Zahl verwandelt wird und umgekehrt werden wir in unserer nächsten Chili betrachten.

Liegt ein unechter Bruch vor und wir verwandeln diesen in eine Dezimalzahl, so steht vor dem Komma immer eine Zahl. Es kann nie „Null Komma…." als Ergebnis vorkommen!!!

Definition: Ein Bruch, dessen Zähler genauso groß wie der Nenner ist, und der bei der Division des Zählers durch den Nenner (beim Kürzen)damit genau 1 ergibt, oder bei der Division des Zählers durch den Nenner genau eine ganze Zahl ergibt, (der Zähler ist ein Vielfaches des Nenners ,der Nenner ein Teiler des Zählers!!) heißt **uneigentlicher Bruch.** Dieser ergibt immer eine ganze Zahl.

Bsp.: $\frac{4}{4}=1$ $\quad \frac{99}{99}=1$ $\quad \frac{3438}{3438}=1$ $\quad \frac{12}{4}=3$ $\quad \frac{66}{6}=11$ $\quad \frac{78}{13}=6$ $\quad \frac{399}{133}=3$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **008**

Rechnen mit Brüchen Einführung-Teil 2

Umwandeln eines unechten Bruchs in eine gemischte Zahl und

einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch

2.Klasse

Rechnen mit Brüchen

Umwandeln eines unechten Bruchs in eine gemischte Zahl

Und trhekegmu (=umgekehrt umgekehrt)

In der vorigen Wissenschili haben wir $\frac{13}{8}$ als *unechten Bruch* im letzten Ü „kennengelernt“.

Wenn wir Achtel haben,also 8 Teile, wissen wir: $\frac{8}{8}=1$ wäre also ein Ganzes. Der Rest, der auf 13 übrig bleibt, sind also 5 Teile, denn

13-8=5. oder 8+??=13 -> 8 +5 =13.

Überlegen wir: $\frac{13}{8}=\frac{8}{8}+\frac{5}{8}=\frac{8+5}{8}=1\frac{5}{8}$. Wir haben nun den Bruch mit logischen Überlegungen in eine Form mit einer ganzen Zahl und einem „Restbruch“ geschrieben.

$1\frac{5}{8}$ sprechen wir *„Ein Ganzes fünf Achtel“* aus.

Die Frage ist nun, ob es eine einfache „Formel“ zum „Verwandeln eines unechten Bruchs in eine gemischte Zahl gibt. Wir legen fest:

Umwandeln: unechter Bruch→gemischte Zahl:

Zähler durch Nenner dividieren, das *Ergebnis= Ganze Zahl* der gemischten neuen Zahl

Rest=Zähler des Bruchs der gem. Zahl ->mit dem gleichen Nenner neben dem(n) Ganzen anschreiben

Beispiel1 : $\frac{13}{8} \rightarrow 13:8=1 \quad 5 \text{ Rest} \quad \rightarrow 1\frac{5}{8}$ *anders notiert* $\frac{13}{8}=1\frac{5}{8}$

Beispiel2: $\frac{98}{12} \rightarrow 98:12=8 \quad 2 \text{ Rest} \quad \rightarrow 8\frac{2}{12} \rightarrow \textit{kürzen!}=8\frac{1}{6}$

anders notiert $\frac{98}{12}=8\frac{1}{6}$

Eine „Formel“ für die Umkehrung gibt es auch:

<u>Umwandeln: gemischte Zahl →unechter Bruch:</u>

Formel: (Ganze Zahl mal Nenner) + Zähler -> ergibt den neuen Zähler des unechten Bruchs

Der Nenner des Bruchs bleibt dann gleich im Ergebnis

Beispiel1: $14\frac{9}{13} \to (14*13)+9 \to \frac{191}{13}$ *anders notiert:* $14\frac{9}{13} = \frac{14\cdot 13+9}{13} = \frac{191}{13}$

Beispiel2: $33\frac{4}{5} \to (33*5)+4 \to \frac{169}{5}$ *anders notiert:* $33\frac{4}{5} = \frac{33\cdot 5+4}{5} = \frac{169}{5}$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **009** **010**

Rechnen mit Brüchen -Teil 3 und 4

Kürzen durch Zahlen **Teil 1 und 2**

2.Klasse

Rechnen mit Brüchen

Kürzen durch Zahlen

echte und unechte Brüchen sowie gemischte Zahlen

Kürzen:

Zähler **UND** Nenner **durch dieselbe Zahl** (oder Variable) **dividieren**

Bsp: $\frac{8^{:8}}{16^{:8}} = \frac{1}{2}$

-> wir haben sowohl den **Zähler** (die Zahl *ober* dem Bruchstrich) als auch den **Nenner** (die Zahl *unter* dem Bruchstrich) durch 8 –die *größtmögliche* zu dividierende Zahl, sodass in Zähler und Nenner eine ganze Zahl bleibt- dividiert.

Schrittweise: $\frac{8^{:2}}{16^{:2}} = \frac{4^{:2}}{8^{:2}} = \frac{2^{:2}}{4^{:2}} = \frac{1}{2}$

Beim Kürzen wird sowohl Zähler als auch Nenner schief durchgestrichen. Später schreibst du die Zahl, durch die du dividierst , meist nicht mehr dazu.

Wir kürzen immer soweit als möglich*!!!!!(bis wir also die kleinstmöglichen Zahlen in Zähler und Nenner haben!!)*

Beachte: Wenn du nur den Zähler oder nur den Nenner durch eine Zahl dividierst, bedeutet dies nicht dass du gekürzt hast!!!

Kürzen bedeutet auch nicht, wie dies oft leider geschieht, dass du den Zähler z.B. durch 2 dividierst, den Nenner aber durch 3 !!!

Musterbeispiel Ü1

Typ: Lösung ergibt keinen Stammbruch (also keinen Bruch, dessen Zähler gleich 1 ist)

Kürze den folgenden Bruch soweit als möglich! möglich (wenn es möglich ist!!) $\frac{80}{88}$

Wende für die Zahl durch die du kürzen kannst, die Bestimmung des ggT an!

Wir versuchen zunächst schrittweise zu kürzen. Dies wird länger dauern als den ggT für die >Kürzzahl zu bestimmen. Der Pfeil zeigt an, durch welche Zahl wir gerade dividiert haben.

$$\frac{80 \rightarrow :2}{88 \rightarrow :2} = \frac{40 \rightarrow :2}{44 \rightarrow :2} = \frac{20 \rightarrow :2}{22 \rightarrow :2} = \frac{10}{11}$$

Multiplizieren wir alle 3 Divisoren, erhalten wir $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Wir hätten also gleich durch 8 kürzen können. Wir wenden die Teilbarkeitsregel für 8 an.

$$\frac{80 \rightarrow :8}{88 \rightarrow :8} = \frac{10}{11}$$

Am sichersten ist es, wenn wir von Zähler und Nenner den ggT bestimmen.

Wir suchen also ggT (80,88). Vermutlich wird es 8 sein.

Wir zerlegen 80 und 88 in Primfaktoren.

80	2	88	2
40	2	44	2
20	2	22	2
10	2	11	11
5	5	1	

$$ggT(80,88) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Wir erhalten also 8 als größtmögliche Zahl, durch die wir kürzen können.

$$\frac{80 \rightarrow :8}{88 \rightarrow :8} = \frac{10}{11}$$

Mit dem ggT haben wir also dieselbe Lösung erhalten.

Musterbeispiel Ü2:

Typ: Der Nenner ist das Doppelte oder ein Vielfaches des Zählers . Genau auf den Bruch schauen!!!

Kürze soweit als möglich (wenn es möglich ist!!)

Wir sehen: Der Nenner ist ein Vielfaches des Zählers.-genau das Doppelte.

$$\frac{99 \rightarrow : 99}{198 \rightarrow : 99} = \frac{1}{2}$$

Am sichersten wäre es, wenn wir von Zähler und Nenner den ggT bestimmen.

Wir suchen also ggT (99,198). Vermutlich wird es 99 sein.

Wir zerlegen 99 und 198 in Primfaktoren.

99	**3**
33	**3**
11	**11**
1	

198	**2**
99	**3**
33	**3**
11	**11**
1	

$$ggT(99{,}198) = 3 \cdot 3 \cdot 11 = 99$$

Wir erhalten also 99 als größtmögliche Zahl, durch die wir kürzen können. $\frac{99 \rightarrow : 99}{198 \rightarrow : 99} = \frac{1}{2}$

Musterbeispiel Ü3:

Typ: Kürzen nach den Teilbarkeitsregeln

Kürzen an Hand der Teibarkeitskriterien- Ziffernsumme für Teilbarkeit durch 3 und 9 sowie Teilbarkeit durch 6

$$\frac{9863667}{890134560}$$

Wir wenden die Teilbarkeitsregel für 3 an. Zähler und Nenner ist durch 3 teilbar,wenn die Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.

$$\frac{\sum = 45}{\sum = 36} \qquad \frac{9863667}{890134560} = \frac{1095963}{98903840}$$

Dies möge uns reichen. Der Nenner ist nicht mehr durch 3 oder 9 teilbar, der Zähler nicht durch 6.

Musterbeispiel Ü4:

Kürzen gemischter Zahlen

Kürze $13\frac{87}{228}$ ***soweit als möglich wenn möglich***

Bei gemischten Zahlen „lassen wir die ganze Zahl stehen, wie sie ist" und kürzen „nur" den Bruch.

$$13\frac{87 \rightarrow :3}{228 \rightarrow :3} = 13\frac{29}{76}$$

Versuchen wir nun wieder die Kürzzahl mit dem ggT zu finden:

87	**3**	228	**2**
29	**29**	114	**2**
1	**1**	57	**3**
1		19	**19**
		1	

$ggT(87{,}228) = 3$

Wir erhalten also 3 als größtmögliche Zahl, durch die wir kürzen können. $13\frac{87 \rightarrow :3}{228 \rightarrow :3} = 13\frac{29}{76}$

Der 13-er bleibt stehen.

Als Probe könnten wir die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, dann kürzen und schließlich wieder den „neuen Bruch" in eine gemischte Zahl umwandeln.

$$13\frac{87}{228} = \frac{3051 \rightarrow :3}{228 \rightarrow :3} = \frac{1017}{76} = 13\frac{29}{76}$$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **011**

Rechnen mit Brüchen -Teil 5

Erweitern mit Zahlen

2.Klasse

Rechnen mit Brüchen

Erweitern mit Zahlen

echte und unechte Brüchen sowie gemischte Zahlen

Erweitern:

Zähler **UND** Nenner **mit derselben Zahl** (oder Variablen) **multiplizieren**

Bsp: $\frac{3^{\cdot 8}}{8^{\cdot 8}} = \frac{24}{64}$

wir haben sowohl den **Zähler** (die Zahl *ober* dem Bruchstrich) als auch den **Nenner** (die Zahl *unter* dem Bruchstrich) mit 8 multipliziert.

Die Zahl mit der erweitert wird, ist meist beliebig, hängt aber oft davon ab wie diese beim ***Bringen auf einen gemeinsamen Nenner*** *lauten soll.*

Manchmal ist auch der Nenner angegeben (oder der Zähler auf den der Bruch gebracht werden soll.

Probe, ob richtig erweitert wurde:

Wir kürzen: $\frac{24 \rightarrow :8}{64 \rightarrow :8} = \frac{3}{8}$

Wir haben wieder die Ausgangszahlen in Nenner und Zähler erhalten, also jenen Bruch, mit dem wir „gestartet sind“

Kürzen ist also die Umkehr (das Gegenteil) des Erweiterns, Erweitern jene des Kürzens.

Beachte: Wenn du nur den Zähler oder nur den Nenner mit eine Zahl multiplizierst, bedeutet dies nicht dass du erweitert hast!!!

Erweitern bedeutet auch nicht, wie dies oft leider geschieht, dass du den Zähler z.B. mit 2 multiplizierst, den Nenner aber mit 3 !!!

Musterbeispiel Ü1

1.) Erweitere den Bruch *mit der* ***angegebenen Zahl.***

Führe 2.) und 3.) erst durch, wenn du 1.) fertig hast

2.) Kürze eventuell gleich den Bruch in der Angabe. (wenn möglich)

3.) Wandle den Bruch aus 2.) dann-wenn möglich- in eine gemischte Zahl um!!!

$$\frac{3453}{693} \quad mit\ 91$$

1.) Erweitern bedeutet, Zähler und Nenner mit **derselben Zahl, hier 91**, zu multiplizieren.

$$\frac{3453 \rightarrow \cdot 91}{693 \rightarrow \cdot 91} = \frac{314223}{63063}$$

2.) wir kürzen gleich in der Angabe:

$$\frac{3453 \rightarrow : 3}{693 \rightarrow : 3} = \frac{1151}{231}$$

3.) wir wandeln noch in eine gemischte Zahl um: $\frac{1151}{231} = 4\frac{227}{231}$

Musterbeispiel Ü2

1.) Erweitere den Bruch so, dass du ***Nenner*** **oder Zähler mit der richtigen Zahl ergänzt.**

Führe 2.) und 3.) erst durch, wenn du 1.) fertig hast!

2.) Kürze eventuell gleich den Bruch in der Angabe. (wenn möglich)

3.) Wandle den Bruch aus 2.) dann-wenn möglich- in eine gemischte Zahl um!!!

$$\frac{37}{64} = \frac{?}{3520}$$

1.) Um jene Zahl zu finden, mit der der Nenner erweitert wurde, müssen wir den Nenner im Bruch mit dem Fragezeichen durch den Nenner im 1.Bruch dividieren.

3520:64=55

Also: $64 \cdot 55 = 3520$ *Es wurde mit 55 erweitert!!!*

Auch der Zähler muss mit 55 multipliziert werden, weil Erweitern bedeutet ja, Zähler und Nenner mit derselben Zahl zu multiplizieren.

$37 \cdot 55 = 2035$

Wir ergänzen also den Zähler

$$\frac{37}{64} = \frac{2035}{3520}$$

2.) und 3.) nicht möglich, weil 37 eine Primzahl ist und der Nenner kein Vielfaches von ihr.

Erweitern gemischter Zahlen

Muster-Ü

1.) Erweitere den Bruch *mit der* ***angegebenen Zahl.***

Führe 2.) erst durch, wenn du 1.) fertig hast

2.) Kürze eventuell gleich den Bruch in der Angabe. *(wenn möglich)*

$$15\frac{38}{156} \quad mit\ 19$$

1.)

Es wird nur **der Bruch selbst** in der gemischten Zahl mit 19 erweitert, nicht aber die ganze Zahl!!!

$$15\frac{38 \rightarrow \cdot 19}{156 \rightarrow \cdot 19} = 15\frac{722}{2964}$$

2.) *wir kürzen gleich* in der Angabe:

$$15\frac{38 \rightarrow : 2}{156 \rightarrow : 2} = 15\frac{19}{78}$$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **012**

Rechnen mit Brüchen -Teil 6

Brüche und

Variable

Kürzen durch Variable **echte und unechte Brüche**

Erweitern mit Variablen **echte und unechte Brüche**

Wissensleuchtturm

2.Klasse

Rechnen mit Brüchen

Kürzen durch Variable

echte und unechte Brüche

Mit Variablen wird genauso gekürzt und erweitert wie mit Zahlen.

Gleiche Variable,also Buchstaben, die im Zähler und im Nenner vorkommen ,werden weggestrichen und gekürzt. Dazu können in Zähler oder Nenner extra noch Zahlen vorkommen.

Musterbeispiel:

Kürze $\frac{393hzic}{780zgh}$ *soweit als möglich*!

Beachte: $\frac{393hzic}{780zgh} = \frac{393 \cdot h \cdot z \cdot i \cdot c}{780 \cdot z \cdot g \cdot h}$ *die Multiplikationszeichen müssen nicht gesetzt werden*

Zunächst kürzen wir die *Buchstaben=Variablen*:

h und z kommen sowohl im Zähler als auch im Nenner vor!

Wir kürzen durch h und z. h und z fallen in Zähler und Nenner weg.

Im Zähler bleiben i und c.

Im Nenner bleibt ein g erhalten.

$$\frac{393hzic}{780zgh} = \frac{393ic}{780g}$$

Erst dann im 2.Schritt kürzen wir die *Zahlen*.

Wir kürzen 393 gegen 780, also kürzen wir durch 3 (Bestimmen der Ziffernsumme nach den Teilbarkeitsregeln!).Am besten bestimmen wir wieder ggT (393,780)

$$\frac{393hzic}{780zgh} = \frac{393ic}{780g} = \frac{131ic}{260g}$$

Erweitern mit Variablen echte und unechte Brüche

Musterbeispiel:

Erweitere den Bruch *mit der(n) angegebenen Zahlen und Variablen,* ***ordne*** *dieVariablen !*

Kürze *soweit als möglich (wo und falls sinnvoll!)*

$$\frac{15\,doublew}{69whopper}$$ mit 21 wp

Zunächst ist es sinnvoll, die Zahlen und Variable im Bruch der **Angabe** zu *kürzen*

$$\frac{15\,doublew}{69whopper}=\frac{5dubl}{23hppr}$$

Wir erweitern,multiplizieren also Zähler und Nenner mit 21 wp

$$\frac{5dubl}{23hppr}\cdot\frac{21wp}{21wp}=\frac{5\cdot 21dublwp}{23\cdot 21hpprwp}$$

Jetzt zu kürzen ist sinnlos, da wir ja gerade erweitert haben und dasselbe ja dann wie zuerst dastehen würde!!!!!!

Nun multiplizieren wir die Zahlen aus und ordnen .Wir erhalten das Endergebnis

$$\frac{5\cdot 21dublwp}{23\cdot 21hpprwp}=\frac{105bdlpuw}{483hppprw}$$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **013**

Rechnen mit Brüchen -Teil 7

Addieren von Brüchen

2.Klasse

Rechnen mit Brüchen

Addieren von Brüchen

Addition gleichnamiger Brüche

Addition gleichnamiger Brüche

Musterbeispiel Ü1:

$$\frac{6}{13}+\frac{3}{13}+\frac{11}{13}=\frac{6+3+11}{13}=\frac{30}{13}=2\frac{4}{13}$$

*Sind die Nenner durchwegs <u>alle gleich</u>, so brauchen wir **nur die Zähler addieren**. Am Ende dürfen wir nicht vergessen, den unechten Bruch in eine gemischte Zahl zu verwandeln.*

Beachte die Schreibweise des <u>großen Bruchstrichs</u> .Er erspart uns, bei gleichnamigen Brüchen, jedesmal den Nenner anschreiben zu müssen. (zur Schreibweise: siehe Übungschili Nr.007)

<u>Musterbeispiel Ü2:</u>

$$\frac{4}{17}+3+\frac{9}{17}=$$

$$1.Möglichkeit: \quad 3+\frac{4+9}{17}=3+\frac{13}{17}=3\frac{13}{17}$$

steht eine ganze Zahl unter den Summanden, so wird diese einfach dazugezählt und die gleichnamigen Brüche extra addiert. Die ganze Zahl wird zur ganzen Zahl der gemischten Zahl.

Musterbeispiel Ü2:

$$\frac{4}{17}+3+\frac{9}{17}=$$

$$2.Möglichkeit: \quad \frac{4}{17}+\frac{3\cdot 17}{17}+\frac{9}{17}=\frac{4}{17}+\frac{51}{17}+\frac{9}{17}=\frac{64}{17}=3\frac{13}{17}$$

In diesem Fall wird die ganze Zahl auf 17-tel gebracht, das heißt, mit 17 erweitert. Wir erhalten einen unechten Bruch, der dann auf eine gemischte Zahl gebracht wird.

Addition ungleichnamiger Brüche

Addition ungleichnamiger Brüche

Was passiert nun, wenn die Nenner nicht gleich sind????

Musterbeispiel Ü3:

Fall 1 : ein Nenner steckt im anderen

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{6}{8}=\frac{1}{8}+\frac{6}{8}+\frac{6}{8}=\frac{13}{8}=1\frac{5}{8}$$

Wir müssen alle Brüche auf Achtel bringen, um addieren zu können.

Die Addition ungleichnamiger Büche führen wir also immer auf die Addition gleichnamiger Brüche zurück. Alle Nenner müssen gleich sein, um addieren zu können.

4 ist in 8 enthalten, daher ist 8 unser gemeinsamer Nenner.(4 ist auf 8 erweiterbar).Wir müssen also Viertel auf Achtel bringen (erweitern).Wir erweitern mit 2. $\frac{3\rightarrow\cdot 2}{4\rightarrow\cdot 2}=\frac{6}{8}$

Musterbeispiel Ü4:

Fall 1 : ein Nenner steckt im anderen

$$\frac{3}{13}+\frac{7}{13}+\frac{11}{26}+\frac{11}{13}+\frac{19}{26}+\frac{8}{13}=$$

$$=\frac{3+7+11+8}{13}+\frac{11+19}{26} \quad 1.Schritt: Zusammnfassen\ der\ gleichnamigen\ Brüche$$

$$=\frac{29\to\cdot 2}{13\to\cdot 2}+\frac{30}{26} \quad der\ gemeinsame\ Nenner\ ist\ 26, denn\ 13 ist\ in\ 26\ enthalten. Wir\ erweitern\ daher$$
$den\ 1.Bruch\ mit\ 2$

$$=\frac{58+30}{26}=\frac{88\to:2}{26\to:2} \quad Addieren\ der\ nun\ gleichnamigen\ Brüche\ und\ Kürzen$$

$$=\frac{44}{13}=3\frac{5}{13} \quad am Ende\ Verwandeln\ in\ eine\ gemischte Zahl$$

Wir betrachten also den größeren Nenner und schauen, ob der andere Nenner auf diesen erweiterbar ist.

Musterbeispiel Ü5:

Fall 2 : kein Nenner steckt im anderen

$$\frac{3}{13}+\frac{6}{17}+\frac{9}{13}+\frac{8}{17}=$$

Es ist nicht möglich, 13 auf 17-tel zu bringen und 17-tel auf 13-tel

Es müssen beide Nenner miteinander multipliziert werden als gemeinsamer Nenner.

1.Möglichkeit: Zunächst als erster Schritt: Zusammenfassen der gleichnamigen Brüche

$$\frac{3}{13}+\frac{6}{17}+\frac{9}{13}+\frac{8}{17}=\frac{3+9}{13}+\frac{6+8}{17}=\frac{12}{13}+\frac{14}{17}$$

$$\frac{3}{13}+\frac{6}{17}+\frac{9}{13}+\frac{8}{17}=\frac{3+9}{13}+\frac{6+8}{17}=\frac{12}{13}+\frac{14}{17}=\frac{12\cdot 17+14\cdot 13}{13\cdot 17}=\frac{204+182}{221}=\frac{386}{221}=1\frac{115}{221}$$

Zum-auf-gemeinsamen –Nenner bringen-multiplizieren wir den Zähler immer mit der Zahl jenes Nenners, der nicht als Faktor in der Multiplikation im Nenner des betroffenen Bruches auftritt.

Die Frage des Erweiterns ist also, wenn wir die beiden Brüche extra aufschreiben (siehe Übungschili Nr.011,Musterbeispiel zu Ü2

$$\frac{12}{13}=\frac{?}{13\cdot 17}$$

der erste Bruch muss also mit 17 erweitert werden, denn 17 kommt im Bruch $\frac{12}{13}$ *in dessen Nenner nicht vor*

$$\frac{14}{17}=\frac{?}{13\cdot 17}$$

der zweite Bruch muss also mit 13 erweitert werden, denn 13 kommt im Bruch $\frac{14}{17}$ *in dessen Nenner nicht vor*

Dieser Vorgang ist das Bilden des kgV.

13	**13**	17	**17**
1		1	

kgV (13,17)=1

Einen Bruch auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen,bedeutet (in schwierigen Fällen) das Bilden des **kgV.**

2.Möglichkeit:Jeder *einzelne Bruch wird sofort* -nach der Methode der 1.Möglichkeit -*auf den gemeinsamen Nenner erweitert*

$$\frac{3}{13}+\frac{6}{17}+\frac{9}{13}+\frac{8}{17}=\frac{3\cdot 17+6\cdot 13+9\cdot 17+8\cdot 13}{13\cdot 17}=\frac{51+78+153+104}{221}=\frac{386}{221}=1\frac{115}{221}$$

Musterbeispiel Ü6

$$\frac{4}{18}+\frac{7}{9}=$$

Beachte:

Bevor du erweiterst, ist es oft günstig, zu **kürzen.** Vielleicht ergibt sich dadurch die *Addition zweier gleichnamiger Brüche.*

$$\frac{4 \rightarrow : 2}{18 \rightarrow : 2}+\frac{7}{9}=\frac{2}{9}+\frac{7}{9}=\frac{9}{9}=1$$

Wir haben bemerkt, dass wir gar keinen gemeinsamen Nenner brauchen.

Bei mehr als 2 verschiedenen Nennern betrachten wir den **größten Nenner** und schauen, ob die anderen Nenner auf diesen erweiterbar sind.

Als sicheres Schema zur Erweiterung dient die Bestimmung des kgV.

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **014**

Rechnen mit Brüchen -Teil 8

Subtrahieren von Brüchen

Wissensleuchtturm 2.Klasse

Rechnen mit Brüchen

Subtrahieren von Brüchen

Bei der Subtraktion von Brüchen gehen wir analog zur Addition vor.

Wir können nur dann Brüche subtrahieren, wenn ihre Nenner alle gleich sind. Anders gesagt, wir müssen bei ungleichnamigen Brüchen versuchen, die Brüche zuerst *auf einen gemeinsamen Nenner* zu bringen, dann erst können wir die Zähler subtrahieren.

Subtraktion gleichnamiger Brüche

Subtraktion gleichnamiger Brüche

Musterbeispiel Ü1:

$$\frac{16}{19}-\frac{9}{19}=\frac{16-9}{19}=\frac{7}{19}$$

*Sind die Nenner durchwegs alle gleich, so brauchen wir **nur die Zähler subtrahieren**. Am Ende dürfen wir nicht vergessen, den unechten Bruch in eine gemischte Zahl zu verwandeln.*

Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Musterbeispiel Ü2:

$$\frac{7}{8}-\frac{16}{24}=\frac{21-16}{24}=\frac{5}{24}$$

Wir müssen alle Brüche auf 24-tel bringen, um subtrahieren zu können.

Die Subtraktion ungleichnamiger Büche führen wir also immer auf die Subtraktion gleichnamiger Brüche zurück. Alle Nenner müssen gleich sein, um subtrahieren zu können.

8 ist in 24enthalten, daher ist 24 unser gemeinsamer Nenner.(8 ist auf 24 erweiterbar).Wir müssen also Achtel auf 24-tel bringen (erweitern).Wir erweitern mit 3. $\frac{7\rightarrow\cdot 3}{8\rightarrow\cdot 3}=\frac{21}{24}$

Was kann bei der Subtraktion von Brüchen passieren??

Musterbeispiel Ü3:

$$\frac{9}{27}-\frac{54}{81}=$$

Der gemeinsame Nenner ist 81, weil 27 in 81 enthalten ist.

$$\frac{9}{27}-\frac{54}{81}=\frac{27-54}{81}$$

Wir bemerken: **Im Nenner erhalten wir eine negative Zahl**. In der 2.Klasse können wir noch nicht mit negativen Zahlen rechnen. Wir schreiben daher nur:

$$\frac{9}{27}-\frac{54}{81}=\frac{27-54}{81}<0$$

Anstatt auf 81-tel zu erweitern, hätten wir zuerst kürzen können.

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}<0$$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **015**

Rechnen mit Brüchen -Teil 9

Multiplizieren von Brüchen

2.Klasse

Multiplizieren von Brüchen

Rechnen mit Brüchen

A Multiplikation eines Bruchs mit einer ganzen Zahl

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}}$$

Die Formel bedeutet:

Der Zähler wird mit der ganzen Zahl multipliziert,der Nenner bleibt unverändert!!!

Bsp1: $\frac{4}{9}\cdot 11=\frac{4\cdot 11}{9}=\frac{44}{9}=4\frac{8}{9}$

Bsp2: $\frac{8}{11}\cdot 22=\frac{8\cdot 22}{11}->k\ddot{u}rzen=16$

B Multiplikation eines Bruchs mit einem Bruch

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Kurzformel: $\boxed{\frac{Z\ddot{a}hler\ mal\ Z\ddot{a}hler}{Nenner\ mal\ Nenner}}$

Ein Bruch wird mit einem anderen multipliziert, indem *die beiden Zähler und die beiden Nenner extra multipliziert werden.*

Gilt auch für mehr als 2 Brüche!!!-(siehe Bsp.2) -mehrere Brüche werden multipliziert, indem alle Zähler und alle Nenner multipliziert werden.

Bsp1: $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 6}=\frac{15}{42}=\frac{5}{14}$

Bsp2: $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot 2\cdot 4}{4\cdot 9\cdot 5}->k\ddot{u}rzen=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

Beachten wir:

$0 \cdot jeder\ Zahl = 0 \qquad jede\ Zahl \cdot 0 = 0$!!!!

In vielen Beispielen ist es ratsam, damit du nicht so hohe Zahlen beim Multiplizieren hast, ***noch vor dem Ausmultiplizieren „kreuzweise“ ,also im „X“ zu kürzen***

Kürzen: in der Angabe: *kreuzweise* χ

z.B. $\frac{3}{8} \cdot \frac{16}{9} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3}$ Krwkü

Unterscheid e das „normale Kürzen“ ***innerhalb*** *des Bruches*

z.B. $\frac{4}{8} \cdot \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ *beachte: hier könnten wir auch 4 gegen 14 „kreuzweise“ kürzen*

Achtung!!!!

Gemischte Zahlen *vor dem Ausmultiplizieren immer als* ***unechten Bruch umschreiben!!!***

$5\frac{4}{8} \cdot \frac{5}{14} \to kein\ Krwkü\ 4\ gegen\ 14\ möglich!!!! = \frac{44}{8} \cdot \frac{5}{14} \to Krwkü\ 44\ gegen\ 14 = \frac{22}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{110}{56}$

Zur Bruchstrichschreibweise:

$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{38} \to = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{8 \cdot 5 \cdot 38} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 38} = \frac{21}{760}$

Es wird nur ein Bruchstrich gesetzt.

Dies funktioniert im Gegensatz zur Addition und Subtraktion bei der Multiplikation auch bei ungleichnamigen Brüchen.

Multiplikation von Brüchen mit Variablen

Kürzen und Erweitern von Variablen: siehe Übungsleuchtturm Nr.012-es gelten dieselben Kürz-und Erweiter-regeln wie bei Zahlen, diese werden daher auch bei der Bruchmultiplikation angewendet.

Bsp zur Orientierung: $\frac{7xp}{8we} \cdot \frac{16we}{14x} =$

$$\frac{7xp}{8we} \cdot \frac{16we}{14x} = p$$

Multiplikation von 3 oder mehreren Brüchen mit Dezimalzahlen vermischt

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{a \cdot c \cdot e \cdot g}{b \cdot d \cdot f \cdot h} = \frac{aceg}{bdfh}$
es gelten dieselben Kürz-und Umwandelregeln wie bei 2 Brüchen!!

Bsp zur Orientierung: $\frac{3}{4} \cdot 11\frac{3}{7} \cdot 3\frac{4}{5} = 32\frac{4}{7}$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **016**

Rechnen mit Brüchen -Teil 10

Dividieren von Brüchen

Zu den Übungsleuchttürmen Nr.017 und Nr.018 gibt es keinen eigenen Wissensleuchtturm,

die erklärende ausführliche Theorie findest du im Lösungsteil der beiden Übungsleuchttürme,sowie in allen Bruch-Wissenschilis!!!

2.Klasse

Dividieren von Brüchen

Rechnen mit Brüchen

A Division eines Bruchs durch eine ganze Zahl

$$\boxed{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \bullet \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}} \qquad c \neq 0$$

Beachte: c darf nicht Null sein!

Die Formel bedeutet:

Der **Nenner** des Bruchs wird mit der ganzen Zahl **multipliziert**, der *Zähler* bleibt ***unverändert!!!!***

Bsp: $\frac{12}{13} : 4 = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{52} -> durch\ 4\ kürzen = \frac{3}{13}$

B Division eines Bruchs durch einen Bruch

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}}$$

Der Dividend (= 1.Bruch) wird mit dem ***Kehrwert des Divisors (2.Bruch***) multipliziert

Kehrwert…kommt von „um*kehren*“

also: der 2.Bruch wird umgedreht, das heißt ,der Zähler und der Nenner werden vertauscht, der 1. Bruch aber ***nicht umgedreht!!!!*** *und es wird* ***multipliziert***

Natürlich gelten dann wieder die Regeln für die Multiplikation von Brüchen!

Bsp1: $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \bullet \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$

Bsp 2: $\frac{4}{7} : \frac{5}{8} = \frac{4}{7} \bullet \frac{8}{5} = \frac{32}{35}$

Nach der obigen Regel gilt daher für die Division eines Bruchs *durch eine ganze Zahl:*

ganze Zahlen beim Dividieren immer als „Eintel“ schreiben und beim Multiplizieren als 1 dividiert durch die ganze Zahl

$$\boxed{\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\bullet\frac{1}{c}=\frac{a}{b\cdot c}}$$

Sonderfall Null: $0:jede\ Zahl=0 \qquad jede\ Zahl:0="verboten"$!!!!

Kürzen bei der Bruchdivsion

Es gibt verschiedene Möglichkeiten:

1.) ***gleich in der Angabe*** ***innerhalb*** ***des Bruches*** ,dann erst Kehrwert bilden!

Bsp: $\frac{4}{16}:\frac{4}{8}=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\bullet\frac{2}{1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ oder

2.) k*reuzweise* aber erst **nach** **Bilden des** **Kehrwertes** *in* ***der Multiplikation!!!!***

Unser voriges Bsp: $\frac{4}{16}:\frac{4}{8}=\frac{4}{16}\bullet\frac{8}{4}=KRWKÜ=\frac{1}{4}\bullet\frac{2}{1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Wir haben „kreuzweise“ im Sinne der Bruchmultiplikations-Kürzregeln gekürzt

4 gegen 4, 16 gegen 8!!!

Wir merken uns:

*<u>In einer Bruchdivision dürfen wir **niemals gleich in der Angabe** „kreuzweise“ kürzen!!!</u>*

Achtung!!!!

Gemischte Zahlen *<u>vor</u> dem Dividieren immer als **<u>unechten Bruch umschreiben!!!</u>***

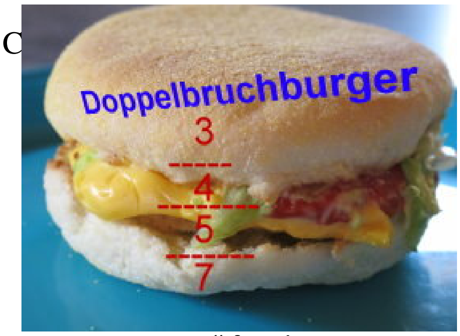
Bsp1:

$$7\frac{7}{8}:\frac{4}{13} \to kein\ Krwkü\ 4\ gegen\ 8\ möglich!!!!=\frac{63}{8}:\frac{4}{13} \to Kein\ Krwkü\ 4 gegen\ 8!!=$$
$$\frac{63}{8}\bullet\frac{13}{4}=\frac{819}{32}=25\frac{19}{32}$$

Bsp2:

$$6\frac{5}{15}:2\frac{6}{9} \to kein\ Krwkü\ 6\ gegen\ 15\ möglich!!!!=\frac{95}{15}:\frac{24}{9} \to Kein\ Krwkü\ 24 gegen\ 15!!=$$
$$innerhalb\ desBruchs\ kürzen\frac{19}{3}:\frac{8}{3}=\frac{19}{3}\bullet\frac{3}{8}=krwkü\frac{19}{1}\cdot\frac{1}{8}=2\frac{3}{8} \to oder:\frac{57}{24}=2\frac{9}{24}=2\frac{3}{8}!!$$

Doppelbrüche



Ein Doppelbruch ist einfach nur eine andere Schreibweise „in einem" für die Division zweier Brüche.

Wir wissen ja ,dass das Dividiert-zeichen der Bruchstrich ist.

Das Ergebnis eines Doppelbruchs ist immer schließlich ein „normaler" Bruch.

Auflösen eines Doppelbruchs: $\dfrac{Aussenglied \quad mal \quad Aussenglied}{Innenglied \quad mal \quad Innenglied}$

Kürze im aufgelösten einfachen Bruch dann wie in der „normalen" Multiplikation zweier Brüche!!!- „kreuzweise" oder gleich innerhalb des Bruchs jeweils *(siehe Kapitel: Multiplikation-Kürzen)*

Bsp1: $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{8 \cdot 5}{9 \cdot 4} = \dfrac{10}{9} = 1\dfrac{1}{9}$

Gemischte Zahlen vor dem Auflösen des Doppelbruchs in **einen unechten Bruch** umwandeln!!

Bsp2: $\dfrac{4\frac{5}{9}}{2\frac{6}{11}} = \dfrac{\frac{41}{9}}{\frac{28}{11}} = \dfrac{41 \cdot 11}{9 \cdot 28} = \dfrac{451}{252} = 1\dfrac{199}{252}$

Statt dem Auflösen nach der Formel hättest du auch eine **„normale" Bruchdivision** ausführen können!

In Bsp1: $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{4}{5}} \leftrightarrow \dfrac{8}{9} : \dfrac{4}{5} \quad = \dfrac{8}{9} \bullet \dfrac{5}{4} = kreuzweisesKürzen \rightarrow \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{5}{1} = \dfrac{10}{9} = 1\dfrac{1}{9}$

In Bsp2: $\dfrac{4\frac{5}{9}}{2\frac{6}{11}} \leftrightarrow 4\dfrac{5}{9} : 2\dfrac{6}{11} \quad = \dfrac{41}{9} : \dfrac{28}{11} = \dfrac{41 \cdot 11}{9 \cdot 28} = \dfrac{451}{252} = 1\dfrac{199}{252}$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **019**

Der Winkel

Wissensleuchtturm 2.Klasse

Der Winkel

Grundüberlegung:

Wiederholung aus der 1.Klasse: ***Strecke, Strahl und Gerade***

Strecke, Strahl und Gerade gibt es in der Ebene und im Raum!!!

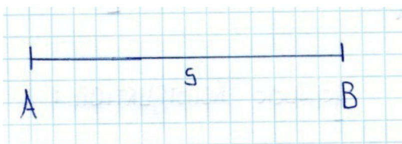
Merke: WH:

Punkte werden mit Großbuchstaben bezeichnet.

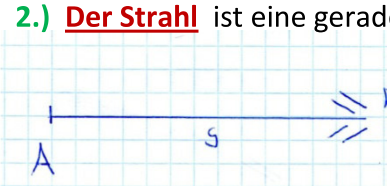
Strecken, Linien, Kanten, Geraden werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

1.) Die Strecke *ist begrenzt. Sie stellt eine Entfernung (Distanz) dar.*

Sie ist die kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten

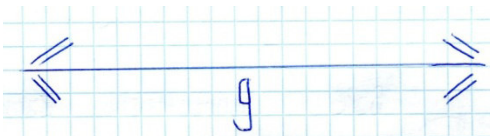


2.) Der Strahl ist eine gerade Linie mit einem Anfangspunkt, aber *keinem* Endpunkt



3.) **Die Gerade** ist eine gerade Linie, die **keinen** Anfangspunkt hat **und keinen** Endpunkt.

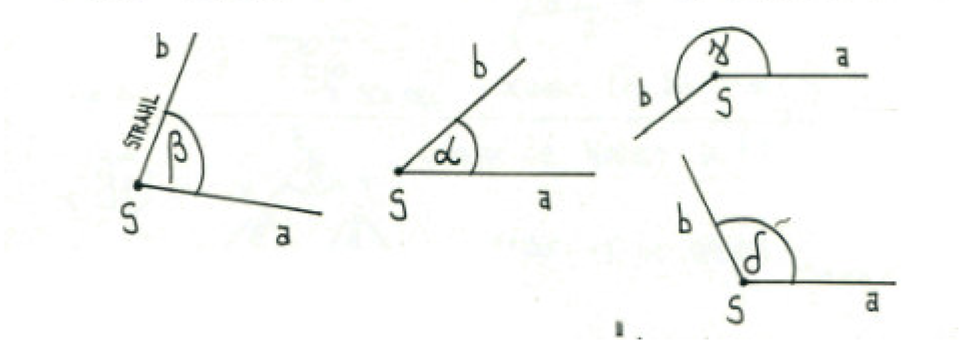
Sie ist **nicht begrenzt.**



Die Grunddefinition des Winkels ist mittels *zweier Strahlen* festgelegt. Das Maß, das ein Winkel definiert, ist eine Größe zwischen 2 speziellen Strahlen, die sogenannten **Schenkel**.

Natürlich wird auch oft der Winkel zwischen zweier (oder mehreren) Geraden oder Strecken gemessen.

Ü Versuche mittels einer Skizze darzustellen, wie überhaupt ein Winkel zwischen 2 Strahlen, Geraden und Strecken definiert sein könnte!



Wie du bemerkst, kann ein Winkel verschiedene „Lagen“ haben-abhängig von der „messbaren Größe“, wie die beiden Strahlen geöffnet sind.

„Je weiter die beiden Strahlen=Schenkel auseinanderliegen, desto größer wird der Winkel“

Beachte die verschiedenen *altgriechischen Buchstaben*, mit denen ein Winkel bezeichnet wird! (siehe auch detaillierter unten)

Definition:
Die Strahlen a und b heißen **Schenkel** des Winkels.
Der Punkt S ist der **Scheitel** des Winkels.

Anwendungsgebiete

Wo werden Winkel häufig gebraucht und gemessen, wo kommen sie vor???

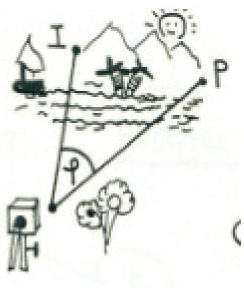
1.) *im Vermessungswesen*:

um unzugängliche Punkte im Gebirge , in der Natur, in Gewässern, Wäldern….zu

bestimmen

beim Straßenbau, in Plänen, Karten, Atlanten im Sinne der Landesvermessung.

In der „höheren Oberstufenmathematik“ wirst du dann den *Vermessungsaufgaben* begegnen, bei denen Winkel und Längen (zum Teil durch andere vorher bestimmte und festgelegte Hilfswinkel) durch Winkelsätze in Zeichnungen genau ermittelt werden.

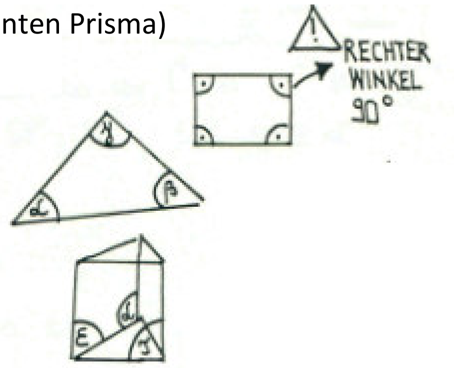


2.) Jede *mathematische geometrische Figur und geometrischer Körper* definiert durch seine Seitenlängen, Kanten, Strecken, Ebenen und Flächen Winkel.

In einer 2-dimensionalen Figur der Ebene- etwa im Dreieck- werden Winkel durch die Seiten definiert.

Im Rechteck etwa finden wir (nur) *rechte Winkel* (90 Grad)

In einem 3-dimensionalen Körper schließen nicht nur Seiten Winkel ein, sogar auch Flächen bilden Winkel. (siehe unten Prisma)



„Im täglichen Leben" sind also überall, wo Formen vorkommen, Winkel durch diese bestimmt…

Bezeichnung eines Winkels:

Häufig und „gerne" mittels altgriechischer Buchstaben. Hier sind die wichtigsten angeführt:

Übe die Schreibweise und ihre Bezeichnung exakt!!!

α...........*Alpha*	β...........*Beta*	γ...........*Gamma*	δ........*Delta*	
ε...........*Epsilon*	τ..........*Tau*	ρ...........*Rho*	π.........*Pi*	ψ...........*Psi*
λ..........*Lambda*	ω....*Omega*	φ....*Phi*	ϕ.......*Sigma*	
μ....*My(sprichMü)*	ζ....*Xi*			

Bemerkung zu den griechischen Buchstaben:

π.........*Pi* ist ein sehr wichtiger Buchstabe in der Mathematik!!

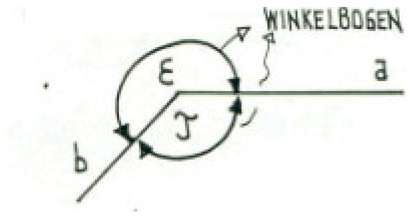
Der Flächeninhalt und Radius des Kreises wird durch Pi definiert. (Kreiszahl! $\pi = 3{,}14...$

->unendlich viele Stellen, von denen ständig neue erforscht werden☺)

Mit ρ...........*Rho* wird *der Inkreisradius in einem Dreieck* bezeichnet.

Der Bogen (Kreisbogen), der um einen Winkel gezogen wird, wird **Winkelbogen** genannt.

Winkelbogen weden mit dem <u>Zirkel</u> gezogen!!!!



Ist der Winkelbogen ein ganzer (voller) Kreis, messen wir 360 Grad= 360^0

Wir sprechen dann von einem **<u>vollen Winkel</u>**.

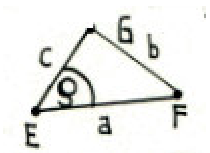
Das hochgestellte „0" bei 360 ist das Symbol für **Grad.**
1 Grad ist der neunzigste Teil des rechten Winkels $\perp$ (der ja 90 Grad hat) $1^0 = \frac{1}{90} des \perp$

$\angle(a,b)$ .... Winkel zwischen a und b

Der Winkelbogen legt hier den Winkel ε..........*Epsilon* und τ..........*Tau* und damit seine Größe eindeutig fest.

Beachte: $\varepsilon + \tau = 360^0$ („laufe einmal die Kreislinie des Bogens rundherum entlang")

<u>Winkel können also auf 3 verschiedene Arten bezeichnet werden:</u>



1.) mittels *altgriechischer Buchstaben*

2.) durch die Bezeichnung *ihrer Strahlen* z.B.: $\rho = \angle(a,b)$ Winkel zwischen a und b

3.) durch die *Buchstaben, die die beiden Winkelschenkel definieren*

Beispiel in der Skizze oben: $\angle FEG$. Dies bedeutet: die Schenkel EF und EG bilden den Winkel ρ..........*Rho*

Merkregel: der mittlere Buchstabe ist der Scheitel!!! Lies dann einmal nach links, einmal nach rechts!!

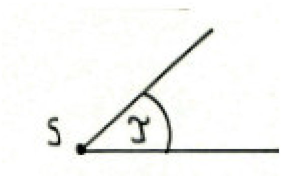
Merke: Die Bezeichnung der Winkel des **Grunddreiecks ABC** wird mit

α...........*Alpha* β...........*Beta* und γ...........*Gamma* vorgenommen.

Der Winkel Alpha hat den Scheitel A, Beta B und Gamma C.

Arten von Winkeln:

1.) **Spitzer Winkel**



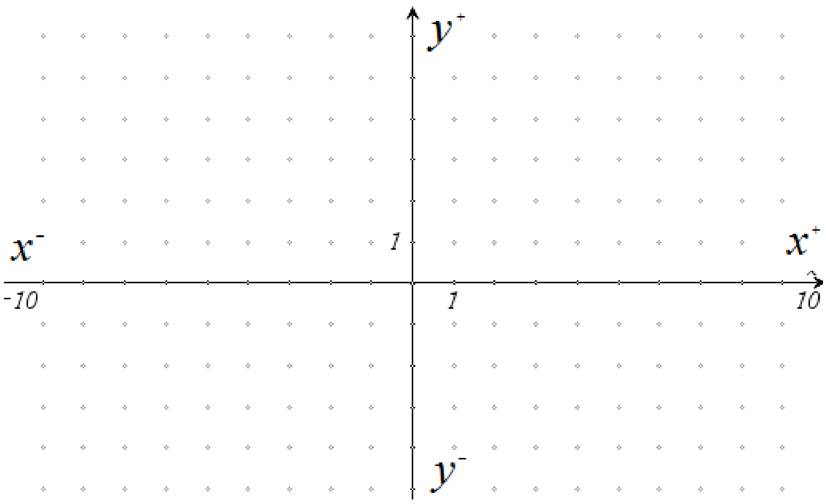
$0 < \tau < 90^0$

Ein Spitzer Winkel liegt also dann vor, wenn dieser 0,…… (0 Komma) bis 89,……(89 Komma) Grad beträgt. (von 1 Grad bis 89 Grad und alle Dezimalgrade größer als Null und kleiner als 90 Grad!)

Beispiele für spitze Winkel:

$\theta(Teta) = 66^0$ $\vartheta = 23^0$ $\kappa(Kappa) = 89{,}2^0$

Um den Begriff des Koordinatensystems später leichter sich vorstellen zu können, wollen wir Winkelarten auch stets in der *Quadrantensicht* festlegen.

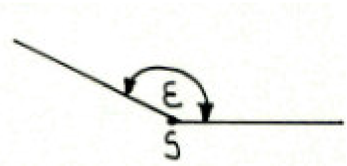


Stellen wir uns ein **Koordinatenkreuz** im Sinne der Gradzählung in der Zeichenebene vor, liegt ein spitzer Winkel stets im oberen rechten Viertelbereich (mathematisch:1.Quadrant). Dieses Koordinatensystem mit vier Achsen (und hiermit die Einteilung in 4 Quadranten) wird uns im Zuge der Einführung der ganzen Zahlen Z (negative Zahlen werden neu definiert!!) beschäftigen.

Dieser obere rechte Viertelbereich (mathematisch:1.Quadrant) wird uns als wichtiger neuer geometrischer Begriff des Koordinatensystems auf der Grundlage positiver (natürlicher) Zahlen im nächsten Kapitel begegnen. Das KOOR-system ist die Basis für die Festlegung und Darstellung von Punkten in der Geometrie.

Konstruktion durch Normal-Anlegen des Geodreiecks!!)

2.) Stumpfer Winkel



$90^0 < \varepsilon < 180^0$

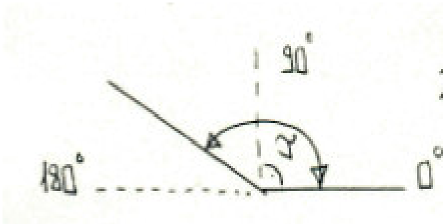
Ein stumpfer Winkel liegt also dann vor, wenn dieser 90,…… (0 Komma) bis 179,……(179 Komma)Grad beträgt. (von 91 Grad bis 179 Grad und dazu alle Dezimalgrade größer als 90 und kleiner als 180Grad!)

Beispiele für stumpfe Winkel:

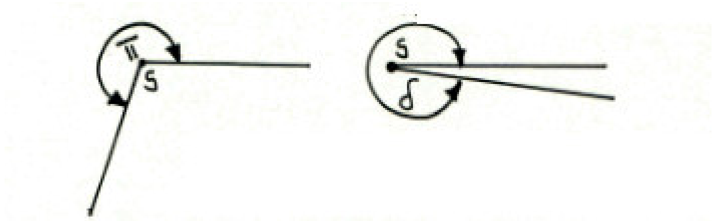
$\theta(Teta) = 126^0$ $\vartheta = 93{,}3^0$ $\kappa(Kappa) = 113^0$

Stellen wir uns ein **Koordinatenkreuz** im Sinne der Gradzählung in der Zeichenebene vor, liegt ein stumpfer Winkel stets im oberen linken Viertelbereich (mathematisch:2.Quadrant).

Beachte: Der *Winkelbogen* reicht dann über 1.und 2.Quadranten



3.) Erhabener Winkel



$180^0 < \pi < 360^0$

$180^0 < \delta < 360^0$

Beachte die genaue Position des Winkelbogens!!! Es wird immer der „längere Kreisbogen“ eingezeichnet!! (den Rest nennt man *Komplementärwinkel*)

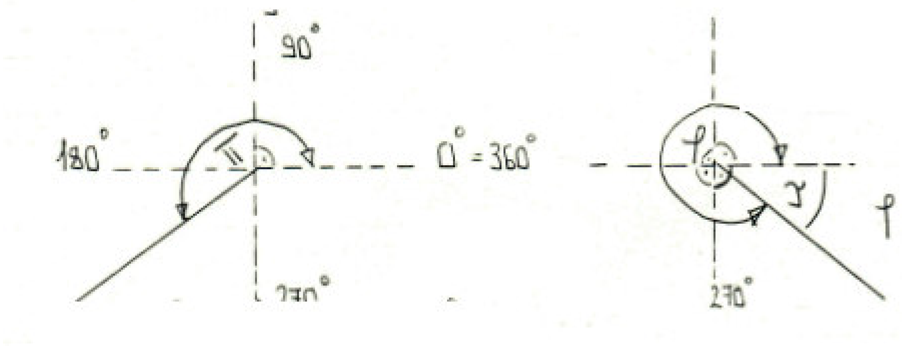
Ein erhabener Winkel liegt also dann vor, wenn dieser 180,…… (180 Komma) bis 359,……(359 Komma)Grad beträgt. (von 181 Grad bis 359 Grad und dazu alle Dezimalgrade größer als 180 und kleiner als 360 Grad!)

Beispiele für erhabene Winkel:

$\theta(Teta) = 196^0$ $\vartheta = 233{,}3^0$ $\kappa(Kappa) = 347^0$

Stellen wir uns ein **Koordinatenkreuz** im Sinne der Gradzählung in der Zeichenebene vor, liegt ein erhabener Winkel stets im unteren linken **oder** unteren rechten Viertelbereich (mathematisch:3.und 4.Quadrant).

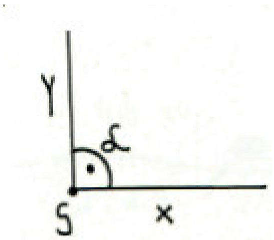
Beachte: Der Winkelbogen reicht dann über 1., 2.und 3.(oder 4.) Quadranten



Sonderfälle

1.) Rechter Winkel

$\alpha = 90^0$ $x \perp y$ $\perp$....... Zeichen für „steht normal"



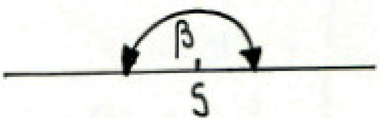
Stellen wir uns ein **Koordinatenkreuz** im Sinne der Gradzählung in der Zeichenebene vor, so **ist** der rechte Winkel in der „**Grundposition**" stets der obere rechte Viertelbereich (mathematisch:1.Quadrant),

Bem.: auch jeder der 3 anderen Viertelbereiche, wenn man diese isoliert betrachtet, bildet einen rechten Winkel

2.) gestreckter Winkel

$\beta = 180^0$

Die beiden Winkelschenkel (Strahlen) bilden stets zusammen **verlängert** eine fortlaufende (gerade) Linie oder Gerade.



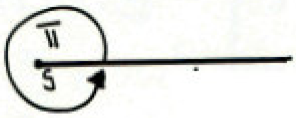
Stellen wir uns ein **Koordinatenkreuz** im Sinne der Gradzählung in der Zeichenebene vor, so **ist** der gestreckte Winkel als Maß genau stets der **gesamte** obere linke und rechte Viertelbereich (mathematisch:1.und 2.Quadrant) und **wird von den beiden x-Koordinatenachsen als Schenkel gebildet.**

3.) voller Winkel

$\pi = 360^0$

Die beiden Winkelschenkel (Strahlen) bilden stets zusammen **übereinanderliegend** eine (gerade) Linie oder Gerade

„Im Sinne eines vollen Winkels laufen wir einmal rundherum (um den Winkelbogen-entlang dieses Bogens)“



Stellen wir uns ein **Koordinatenkreuz** im Sinne der Gradzählung in der Zeichenebene vor, so **ist** der volle Winkel als Maß genau stets der **gesamte** obere linke und rechte sowie der untere linke und rechte Viertelbereich (mathematisch:1., 2.,3.und 4.Quadrant) und wird von der positiven x-Koordinatenachse als übereinanderliegende Schenkel gebildet

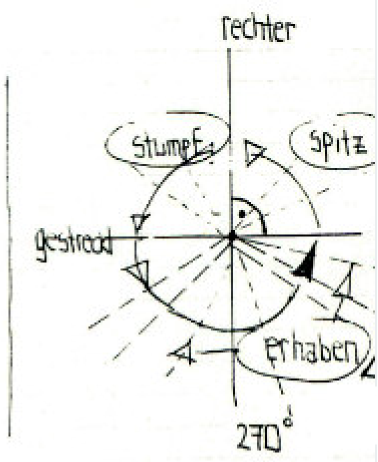
Bemerkung:

$\pi = 270^0$ wird nicht als Sonderfall definiert.

Stellen wir uns ein **Koordinatenkreuz** im Sinne der Gradzählung in der Zeichenebene vor, so **ist** der 270 grad Winkel als Maß genau stets der **gesamte** obere linke und rechte sowie der untere linke Viertelbereich (mathematisch:1., 2.,3.Quadrant) und wird von **der positiven x-Koordinatenachse und der negativen y-Koordinatenachse als Schenkel gebildet**

siehe zusammenfassende Skizze am Beginn der nächsten Seite!!!

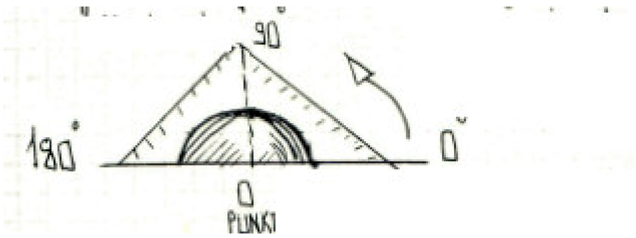
Zusammenfassende Skizze der Winkelarten im Sinne des Koordinatensystem(-kreuzes)



Konstruktion von Winkeln

Winkel werden mit dem Geodreieck, auf dem sich heutzutage eine genaue Skala zur Messung befindet, bestimmt. Früher gab es eigene Winkelmesser.

1.) Für alle Winkel **kleiner als** 180^0 legen wir das Geodreieck folgendermaßen an:



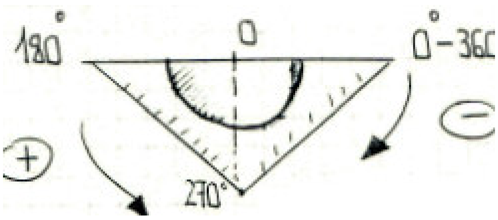
Dabei stellen wir uns ein Koordinatenkreuz als Hilfe im Sinne der Gradzählung in der Zeichenebene vor

Der Nullpunkt des Geodreiecks liegt genau im Koordinatenkreuzmittelpunkt (Ursprung) –also im Scheitel des zu messenden Winkels!!!!

von 1 grad bis 179 Grad (und alle Kommagrade 0,…; 179,… dazu)

wir messen gegen den Uhrzeigersinn von Null rechts weg hinauf!!!!

2.) Für alle Winkel größer als 180^0 **und kleiner als** 360^0 legen wir das Geodreieck folgendermaßen an:



Einen erhabenen Winkel konstruieren wir daher folgendermaßen:

von 181 grad bis 359 Grad (und 180,…;359,..)liegt das Geodreick wie oben: (für Fall 1 und Fall 2 im Folgenden)

Fall 1

von 181 grad bis 269 (und 180,….;269,…)Grad zählen wir die **entsprechenden Grade zu** 180^0 **dazu**

wir messen *gegen den Uhrzeigersinn* von Null links weg hinunter!!!!

Beispiel: $222^0 = 180^0 + 42^0$

$197^0 = 180^0 + 17^0$

Fall 2

von 271 grad bis 359 Grad (und 270,…;359,..)zählen wir die **entsprechenden Grade von** 360^0 **ab**

wir messen *im Uhrzeigersinn* von Null rechts weg hinunter!!!!

Beispiel: $300^0 = 360^0 - 60^0$

$288^0 = 360^0 - 72^0$

Bemerkung: Konstruktion der Sonderfälle (siehe auch oben)

$\alpha = 90^0$ konstruieren wir durch Anlegen des Geodreiecks im Sinne zweier normaler Geraden (Linien) (->siehe 1.Klasse: Kapitel „normale Gerade“)

vergiss nicht, immer den Winkelbogen mit dem Zirkel zu setzen!!!

$\alpha = 180^0$ konstruieren wir durch „Durchziehen einer fortlaufenden Linie“ mit dem Geodreieck

$\alpha = 270^0$ konstruieren wir durch Anlegen des Geodreiecks im Sinne zweier normaler Geraden (siehe 1.Klasse) *und entsprechender Winkelbogensetzung* (siehe oben)

$\alpha = 360^0$ konstruieren wir durch Setzen einer dicken Linie (2 Schenkel aufeinander)

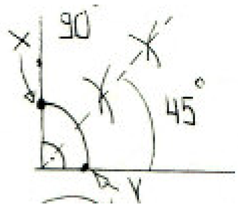
Spezielle Konstruktionen ohne Skala des Geodreiecks:

Diese werden mit dem Zirkel durchgeführt

Ü4 Konstruiere den folgenden Winkel ohne mit dem Geodreieck abzumessen exakt:

$\alpha = 45^0$

Für diese Konstruktion wird der 90^0 Winkel halbiert.



Konstruktionsgang:

1.) wir ziehen einen beliebigen Kreisbogen um die Schenkel des 90grad Winkels.

dadurch entstehen 2 Punkte X und Y.

2.) Wir lassen die Spanne des Bogens im Zirkel (wir könnten auch eine neue Distanz in den Zirkel nehmen)

3.) wir stechen in den Punkt X mit dem Zirkel ein und ziehen einen Bogen

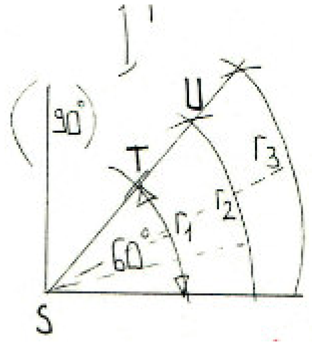
4.) **wir lassen diese Länge von 3.) im Zirkel** !!!!!!! und stechen in den Punkt Y mit dem Zirkel ein und ziehen einen Bogen. Dadurch entsteht ein Schnittpunkt S. =abschlagen

5.) wir verbinden den Scheitelpunkt mit dem Schnittpunkt aus 4.)zu einem neuen Schenkel

Diese Konstruktion entspricht der Konstruktion der **Winkelsymmetrale!!!!**

Ü5 Konstruiere den folgenden Winkel ohne mit dem Geodreieck abzumessen exakt:

$\alpha = 60^0$



Konstruktionsgang:

1.) wir zeichnen mit *dünnen Linien* den 90grad Winkel

2.) wir ziehen vom Scheitel S aus einen beliebig langen Bogen. (Radius 1)

3.) wo der Bogen den waagrechten Schenkel schneidet, entsteht ein Schnittpunkt

4.) Wir lassen die Spanne des Bogens aus 2.) im Zirkel und schlagen diese vom Schnittpunkt aus auf dem Kreisbogen ab. Ein neuer Punkt T entsteht.

wir wiederholen diese Schritte ab 2.) mit einer neuen Länge (Radius 2 .) (U entsteht)

6.) wir verbinden die Punkte T und U. So entsteht der2. Schenkel des 60grad Winkels.

Ein 3.Radius ist „Luxus"

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **021**

Das rechtwinkelige Koordinatensystem

in der 2.Klasse **Teil 1**

positive Achsen: Punkte nur mit positiven Koordinaten

Ein **Koordinatensystem** ermöglicht uns das Festlegen von Längen, Größen, Strecken, Geraden, Figuren, Körpern durch die „Absteckung=Fixierung“ von Punkten, und damit eine einfachere Berechnung von Größen sowie die festgelegte Konstruktion von Figuren und Körpern

Merke:

„Unser Koordinatensystem der 2.Klasse“ ist -mangels Kenntnis negativer Zahlen-

das ***zweidimensionale*** *Koordinatensystem der Ebene. Es gibt (nur) 2 positive Achsen,*

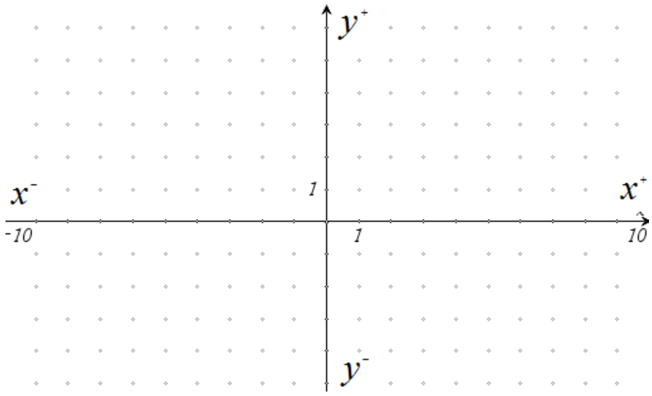
die x-Achse und die y-Achse*.(siehe im Gegensatz dazu Graphik auf der nächsten Seite:Koordinatenkreuz)*

Statt x-und y-Achse könnten wir auch schreiben: x^{+} *sowie* y^{+} *Achse. (nur positive Achsen!!)*

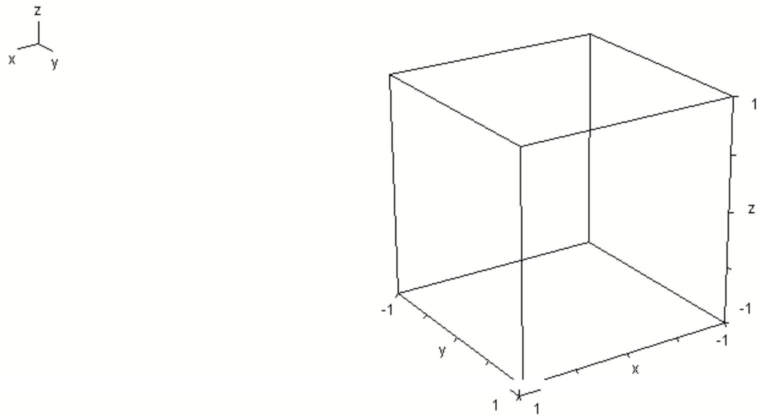
Bemerkung: Die Einheit der Koordinatenachsen auf unserem Zeichenblatt wählen wir für alle unsere Konstruktionen hier in Mathe Chilled ***immer 1cm!!!***

Später erweitern wir dieses zweidimensionale Koordinatensystem in Kenntnis der Menge Z (vor allem der negativen ganzen und rationalen Zahlen) mit ***negativen*** *x-Koordinaten und y-Koordinaten. Es gibt nun eine x^{-} sowie y^{-}-achse. Wir sprechen auch von einem sogenannten „Koordinatenkreuz“*

Erinnere dich an unser ähnliches „Winkelkoordinatensystem“



In der Oberstufe wirst du ein ***dreidimensionales*** *Koordinatensystem des Raumes kennenlernen*



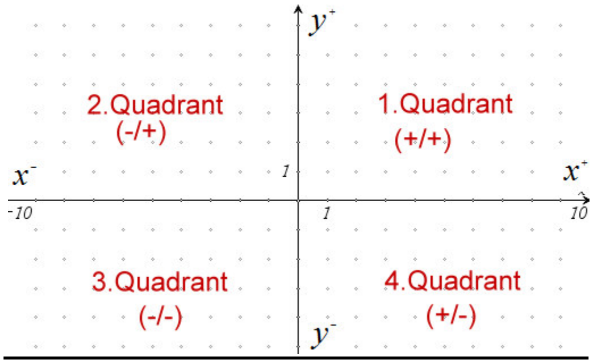
Bemerkung:

Ein Punkt im **dreidimensionalen Koordinatensystem**, etwa der *Eckpunkt eines Körpers*, hat dann **3 Koordinaten**, eine x-,y- und z-Koordinate.

z.B. $S\,(13/7/9)$

Diese können natürlich dann auch negativ sein. Das Zeichnen von 3-dimensionalen Körpern in einem solchen Koordinatensystem führt fast immer zu einer gewissen *Verzerrung*!!

Die Koordinatenachsen des 2-dimensionalen.Koordinatensystems (Koor-kreuz) teilen die Zeichenebene in ***__4 Quadranten. Beachte die Vorzeichen der Koordinaten!__***



Die Beschriftung der Quadranten erfolgt ***stets __gegen__*** *__den Uhrzeigersinn!__*

Die x-Achse heißt auch ***__Abszisse__****, die y-Achse* ***__Ordinate__***

Der Schnittpunkt der 4 Koordinatenachsen $P(0/0)$ *heißt* ***__Nullpunkt oder Koordinatenursprung__***

$P\left(+7/+3\right)\rightarrow$ *die erste Eintragung ist die x-Koordinate (hier also 7) und die zweite die y-Koordinate (hier also 3).Wir schreiben auch* $P\left(+7;+3\right)\rightarrow$ *ein Strichpunkt statt Querstrich*

Das positive Koordinatenvorzeichen muss nicht angeschrieben werden

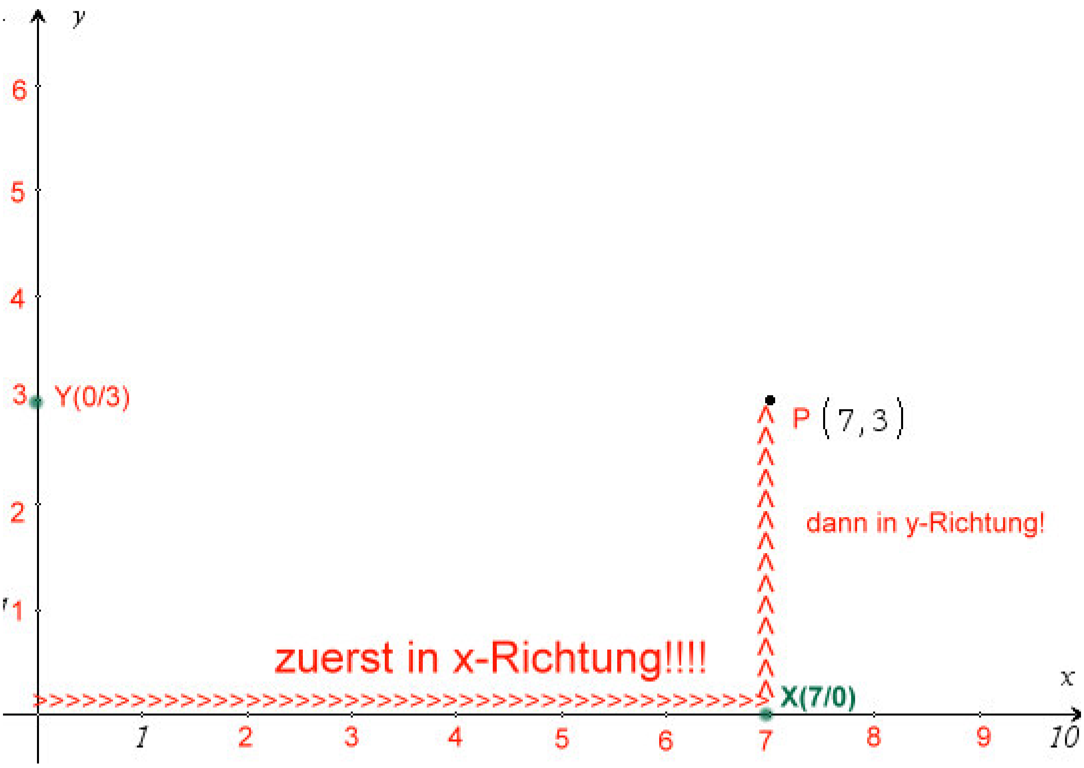
$P\left(+4/+5\right)\rightarrow P(4/5)$

Betrachten wir die Koordinaten eines beliebigen Punktes P.

$P(7/3)$ →> *die erste Eintragung, also 7, ist die x-Koordinate.*

Wir müssen daher zunächst +7 auf der (positiven) x-Achse nach rechts gehen .

Die 2.Eintragung,also +3, ist die y-Koordinate.Wir müssen also von X $(7/0)$*,dem Punkt der genau auf der (positiven) x-Achse liegt, noch 3 in die (positive) y-Richtung hinauf wandern.*



Liegt ein Punkt auf einer der 4 Koordinatenachsen direkt , so hat er eine Koordinate stets 0.

$P(0/5) \rightarrow$ *Punkt liegt auf der (positiven) y-Achse x-Koordinate ist 0.*

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **021**

Das rechtwinkelige Koordinatensystem

Teil 2

positive Achsen: Punkte nur mit positiven Koordinaten

Standardbeispiele **Chill dein Wissen**

Abmessen von Winkeln

Wie hältst du in unseren beiden Beispielen Ü3-1 und Ü3-2 das Geodreieck an, um den Winkel zu messen???

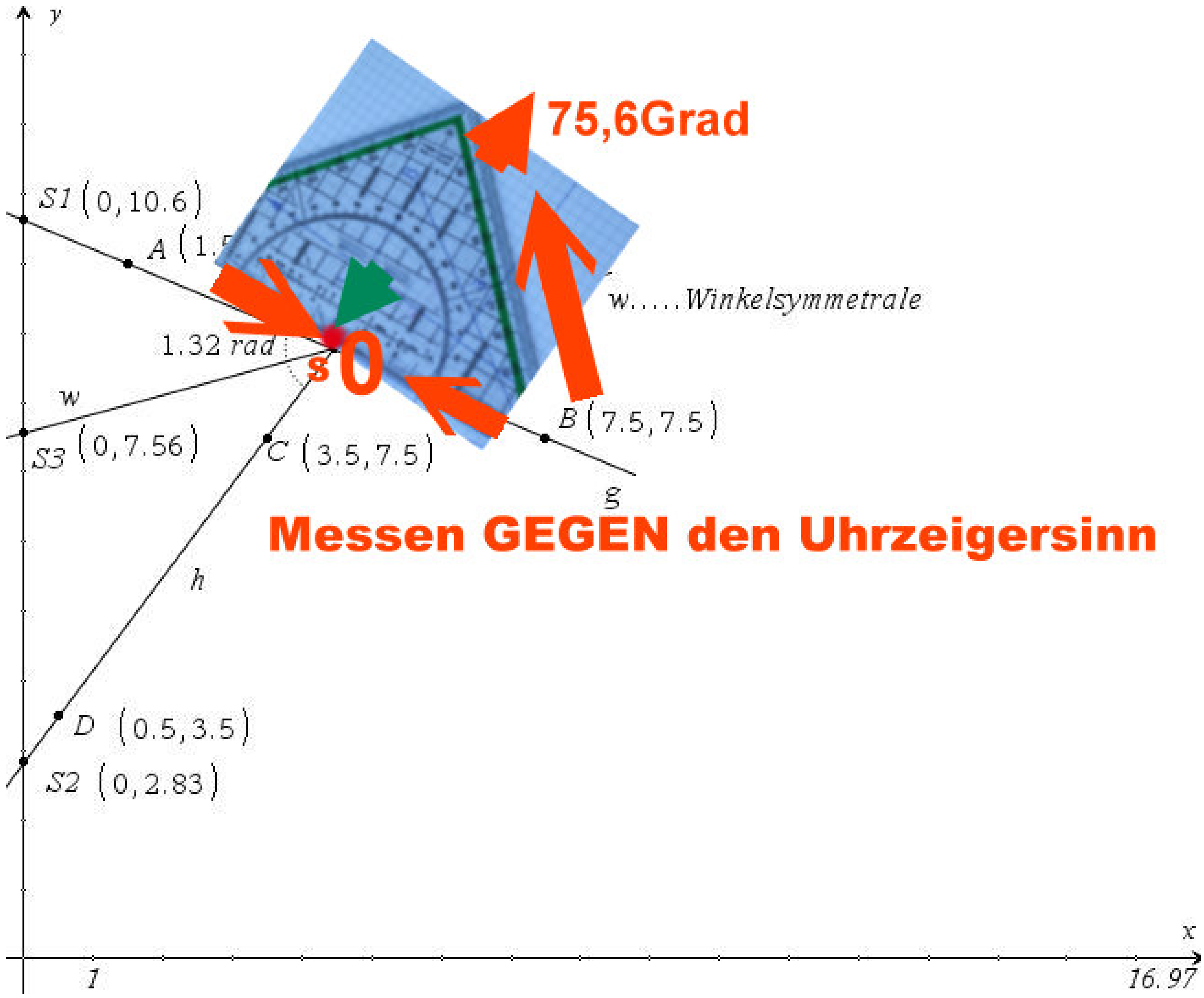
Ü-1

Der Winkel ASC ist gesucht.

$\angle ASC = ?^0$

Da der gegenüberliegende Winkel gleich groß ist, legen wir am Zeichenblatt das Geodreieck wie in der Grafik unten folgt an:

Der Nullpunkt des Geodreiecks liegt im Schnittpunkt S. Wir messen **gegen den Uhrzeigersinn**. $\angle ASC = 75{,}6^0$



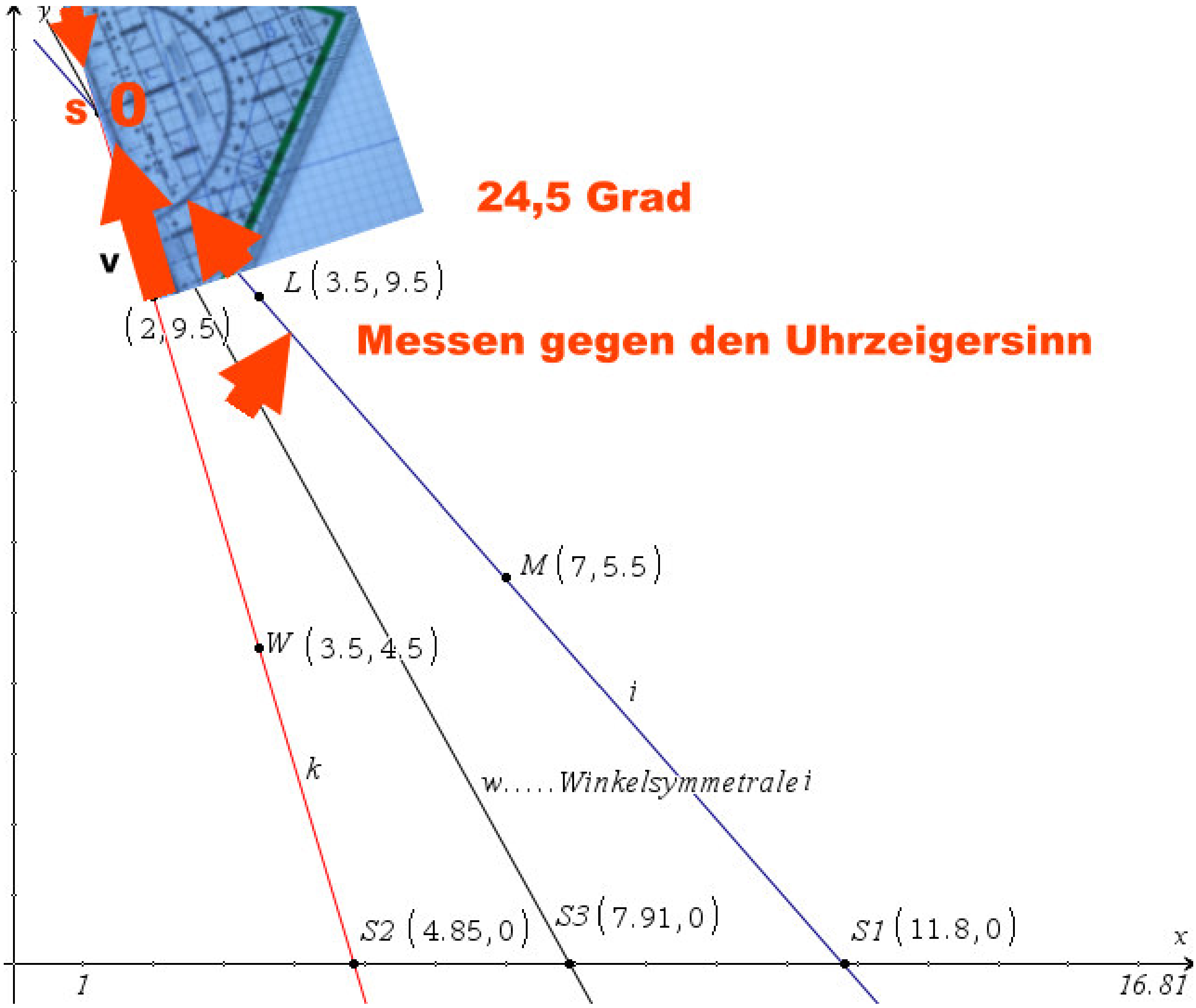
Ü-2

Der Winkel LSV ist gesucht. Also jener Winkel der in der Grafik unten vom roten Schenkel und blauen Schenkel eingeschlossen wird.

$\angle LSV = ?^{0}$

Wir legen am Zeichenblatt das Geodreieck wie in der Grafik unten folgt an:

Der Nullpunkt des Geodreiecks liegt im Schnittpunkt S. Wir messen **gegen den Uhrzeigersinn**. $\angle LSV = 24{,}5^{0}$

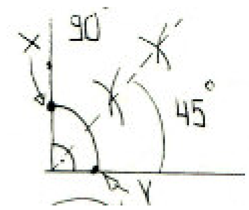


Konstruktion der Winkelsymmetralen:

siehe Übungsleuchtturm 019 zum Winkel- Seite 25 –Ü8->>

Konstruktion des 45 Grad Winkels entspricht der Konstruktion der Winkelsymmetrale!!!

Ein Winkel wird halbiert.-wie???



Konstruktionsgang:

1.) wir ziehen einen beliebigen Kreisbogen um die Schenkel des Winkels.

dadurch entstehen 2 Punkte X und Y.

2.) Wir lassen die Spanne des Bogens im Zirkel (wir könnten auch eine neue Distanz in den Zirkel nehmen)

3.) wir stechen in den Punkt X mit dem Zirkel ein und ziehen einen Bogen

4.) **wir lassen diese Länge von 3.) im Zirkel** !!!!!!! und stechen in den Punkt Y mit dem Zirkel ein und ziehen einen Bogen. Dadurch entsteht ein Schnittpunkt S. =abschlagen

5.) wir verbinden den Scheitelpunkt mit dem Schnittpunkt aus 4.)zu einem neuen Schenkel

Diese Konstruktion entspricht der Konstruktion der **Winkelsymmetrale!!!!**

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **022**

Die besonderen sonderbaren Punkte im Dreieck

H,S,U und I im positiven Koordinatensystem

Konstruktion

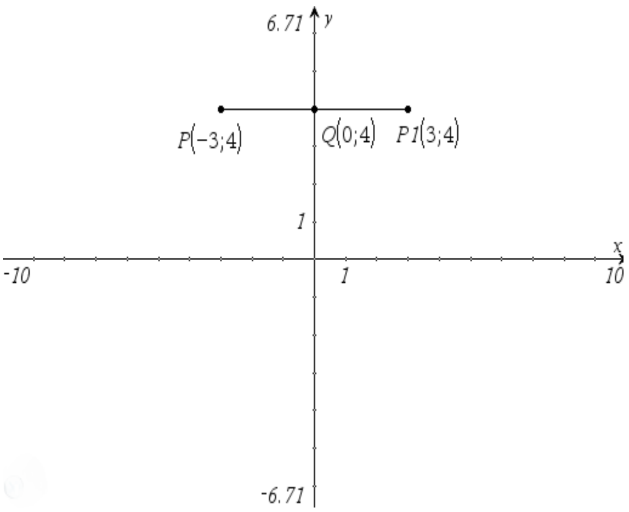
1 U Der Umkreismittelpunkt-Umkreis

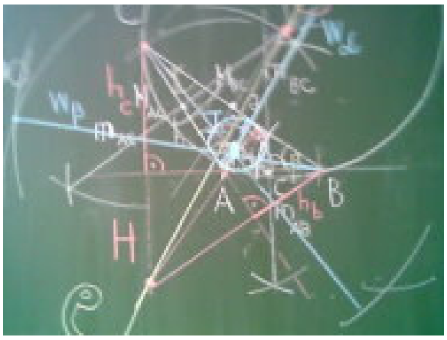
Zeichnen wir auf alle Dreiecksseiten jeweils eine **Streckensymmetrale**- sie werden im Dreieck **Seitensymmetralen** genannt- so erhalten wir durch deren Schnitt die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U.

Die Konstruktion der Streckensymmetrale entspricht in folgendem Sinne der Spiegelung unserer vorherigen Wissenschili, die die unten angeführte Graphik nochmals veranschaulicht

*Q ist der **Mittelpunkt (Halbierungspunkt)** der Strecke* $\overline{PP_1}$.

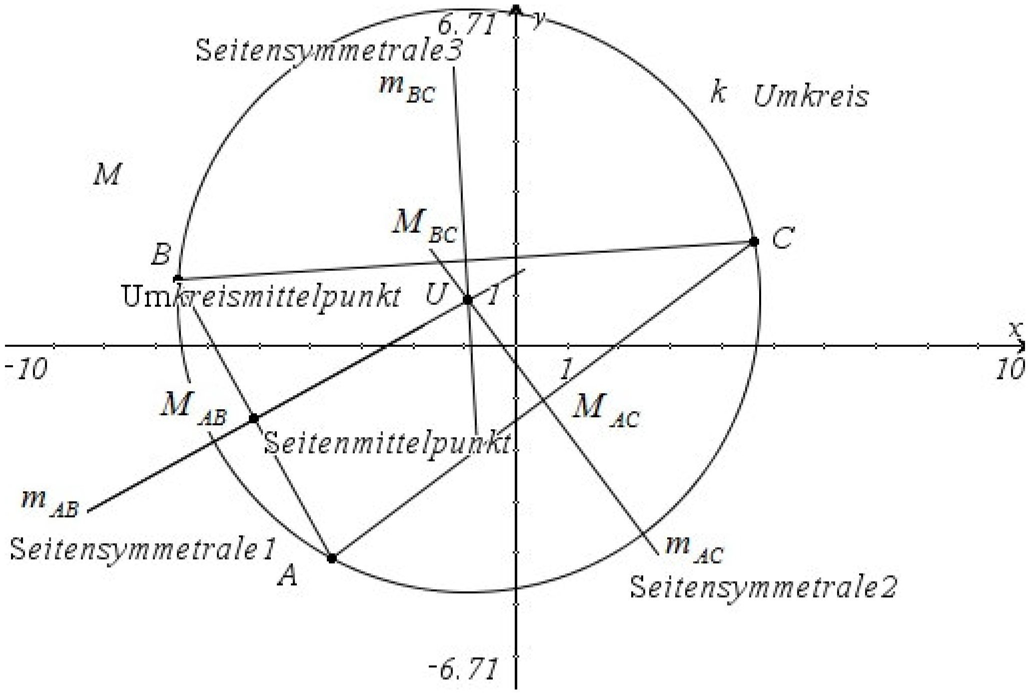
*Die y-Achse ist die **Streckensymmetrale** der Strecke* $\overline{PP_1}$ *.Im Dreieck werden wir sie **Seitensymmetrale** nennen.*





Tafelkonstruktion der Eulerschen Geraden e

Hier sei nun als Veranschaulichung eine Konstruktion eines Umkreismittelpunkts und Umkreises (im spitzwinkeligen Dreieck) ausgeführt:



M_{AB}......*Mittelpunkt der Seite (Seitenmittelpunkt) AB* M_{AC}........*Mittelpunkt der Seite AC*

M_{BC}.......*Mittelpunkt der Seite BC*

U........Umkreismittelpunkt

m_{AB}.......*Seitensymmetrale auf die Seite AB(c) durch den Mittelpunkt der Seite* M_{AB}

$m_{AC.}$........*Seitensymmetrale auf die Seite AC(b) durch den Mittelpunkt der Seite* M_{AC}

m_{BC}..........*Seitensymmetrale auf die Seite BC(a) durch den Mittelpunkt der Seite* M_{BC}

Stichst du in U ein und zeichnest du den Kreis durch alle 3 Eckpunkte des Dreiecks , hast du den Umkreis k konstruiert. **Der Radius des Umkreises** ist : $\boxed{r = \overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC}}$

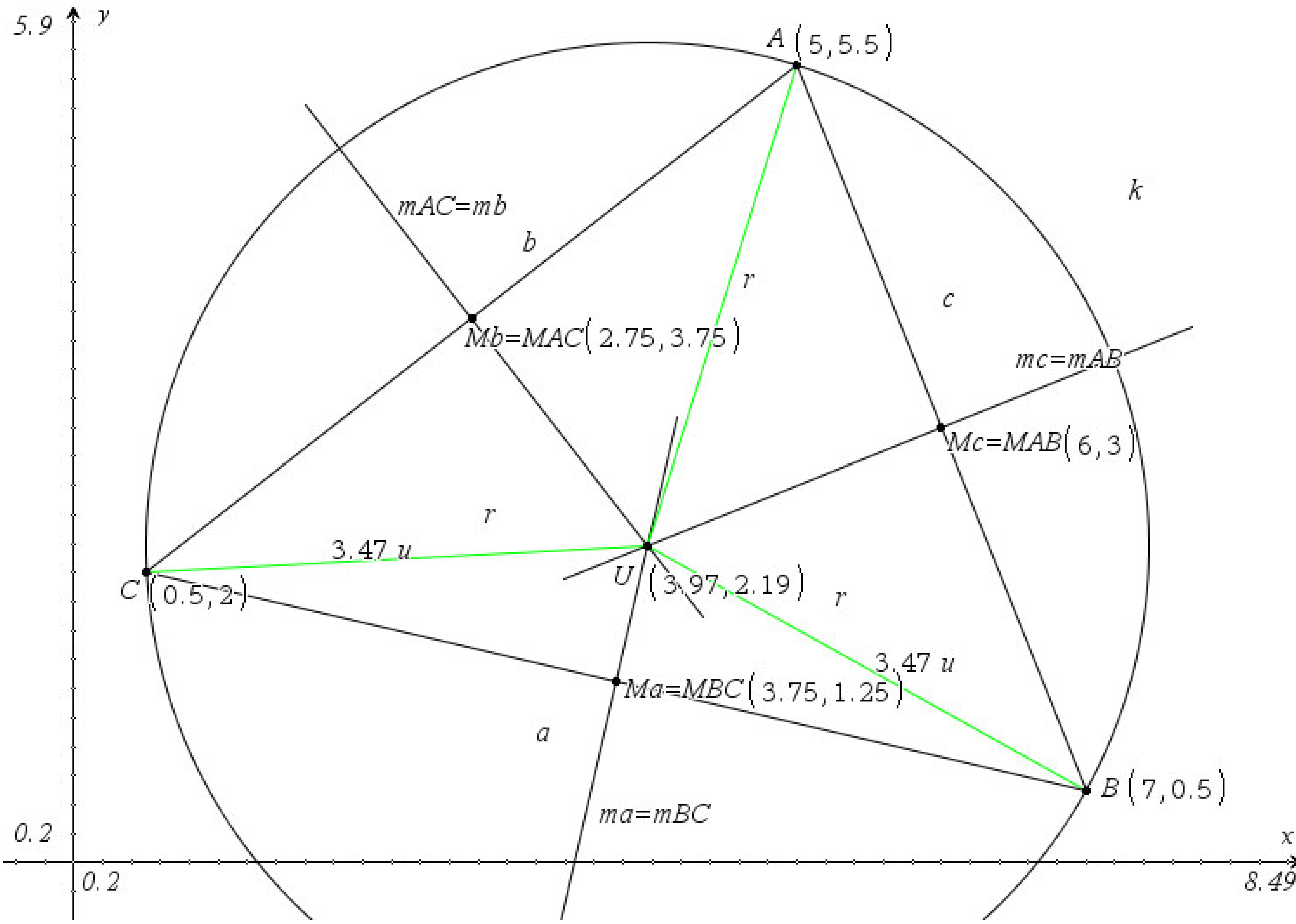
Merke: Die Seitensymmetrale steht normal auf die Dreiecksseite und verläuft durch den Mittelpunkt der Seite. (und steht in diesem normal). Sie verläuft (im Allgemeinen) **nicht** durch den *gegenüberliegenden Eckpunkt* (wäre Zufall!)

Der Umkreismittelpunkt U liegt beim **spitzwinkeligen Dreieck innerhalb** ,

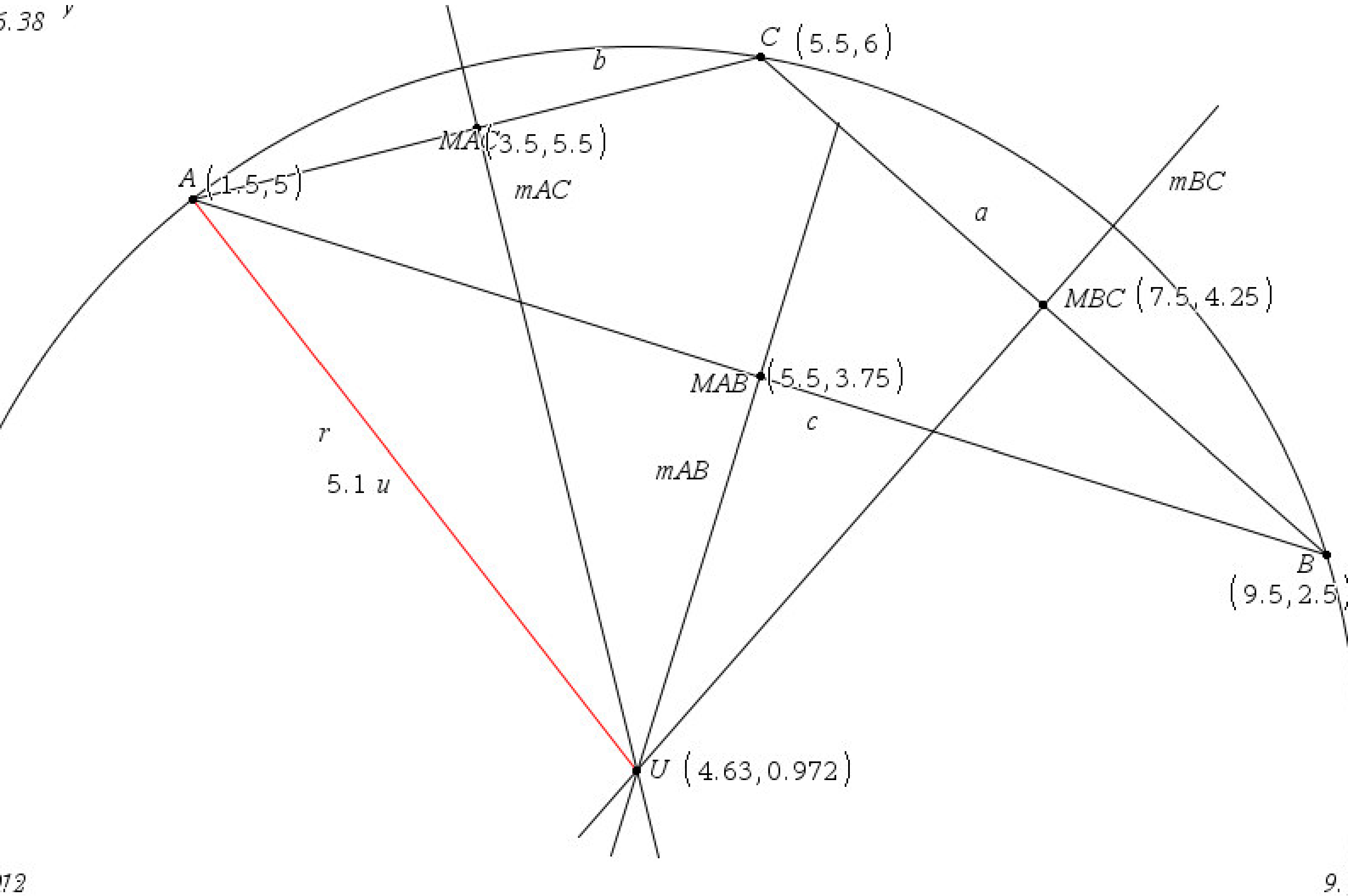
beim **stumpfwinkeligen** Dreieck **außerhalb der Dreiecksfläche**.

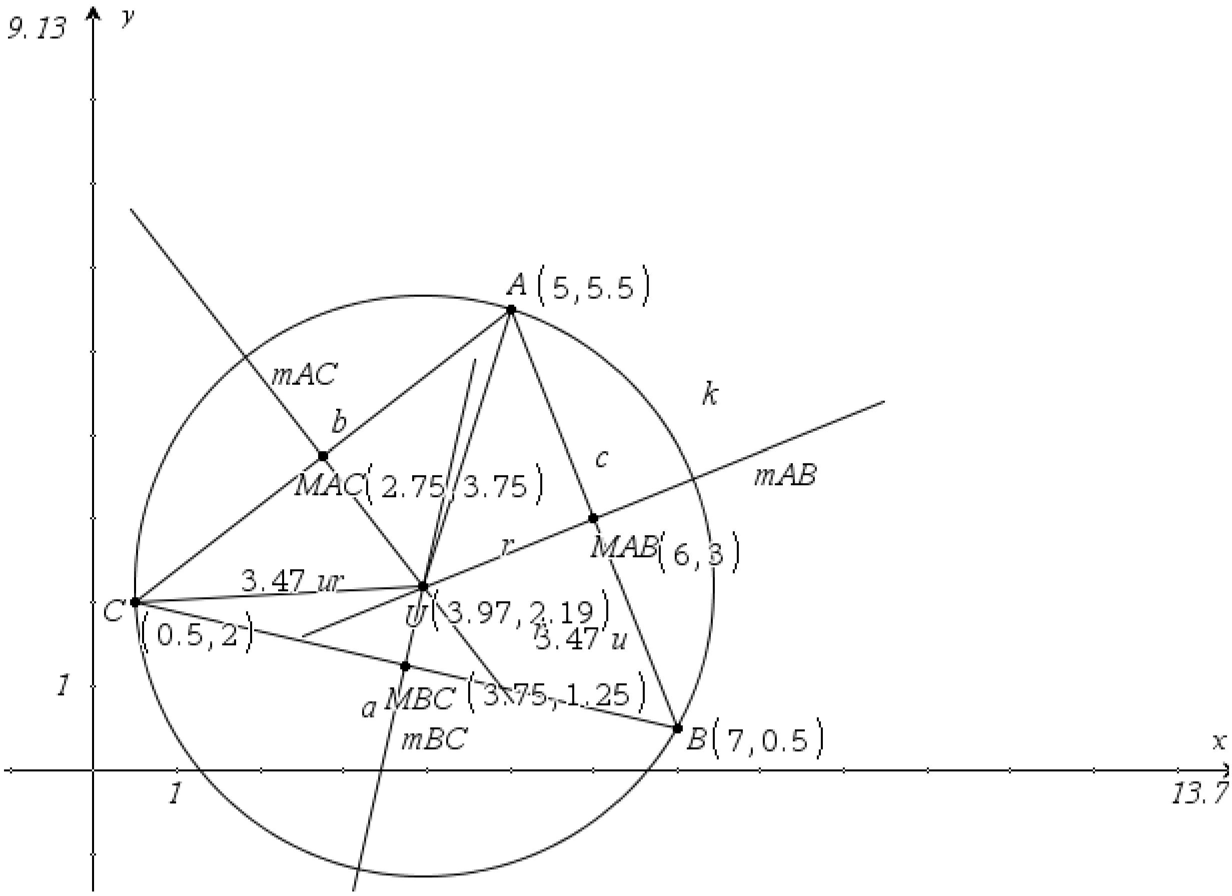
Beim rechtwinkeligen Dreieck ist er der Mittelpunkt der Hypotenuse.

Beispiel für eine Konstruktion von U im spitzwinkeligen Dreieck



Beispiel für eine Konstruktion von U im stumpfwinkeligen Dreieck




9. 13
y
A (5, 5.5)
mAC
k
b
c
mAB
MAC (2.75, 3.75)
MAB (6, 3)
r
3.47 ur
C
U (3.97, 2.19)
(0.5, 2)
3.47 u
1
a MBC (3.75, 1.25)
mBC
B (7, 0.5)
x
1
13. 7

2 Der Höhenschnittpunkt

Die Höhe ist eine ***Normale*** *auf die Dreiecksseite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.*

Die Höhe wird auch Höhenlinie genannt. Höhe bedeutet eigentlich eine begrenzte Länge ,

Höhenlinie die verlängerte Gerade. In der Praxis wird aber eigentlich nicht unterschieden.

Der Schnitt der 3 Höhen(-linien) in einem Punkt ergibt den ***Höhenschittpunkt H.***

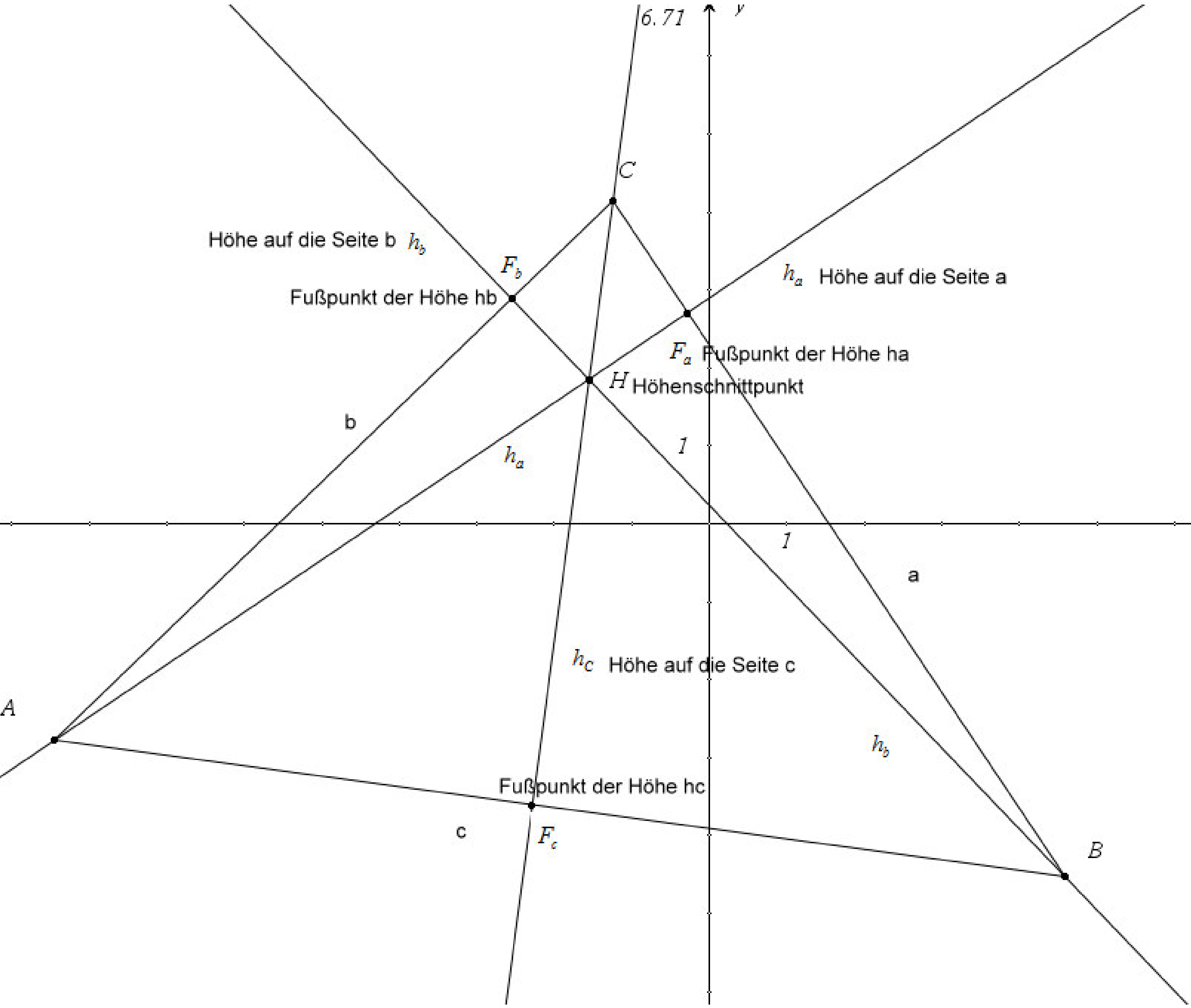
Konstruktionsgang für die Höhe:

Lege das Geodreieck **normal auf eine Seite** an (Nulllinie auf der Seite wie auf der Abbildung unten!) und ziehe eine Linie (=Normale) **durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.**

Merke: Der Höhenschnittpunkt H liegt beim **spitzwinkeligen Dreieck innerhalb** ,

beim **stumpfwinkeligen außerhalb der Dreiecksfläche**.

Beim rechtwinkeligen Dreieck ist er der Scheitel des rechten Winkels



Zeichne immer das Symbol des rechten Winkels im Schnitt der Höhen mit den Seiten ein!

F_a......Fußpunkt der Höhe h_a auf die Seite a = Schnittpunkt der Höhe h_a mit der Seite a

F_b......Fußpunkt der Höhe h_b auf die Seite b = Schnittpunkt der Höhe h_b mit der Seite b

F_c......Fußpunkt der Höhe h_c auf die Seite c = Schnittpunkt der Höhe h_c mit der Seite c

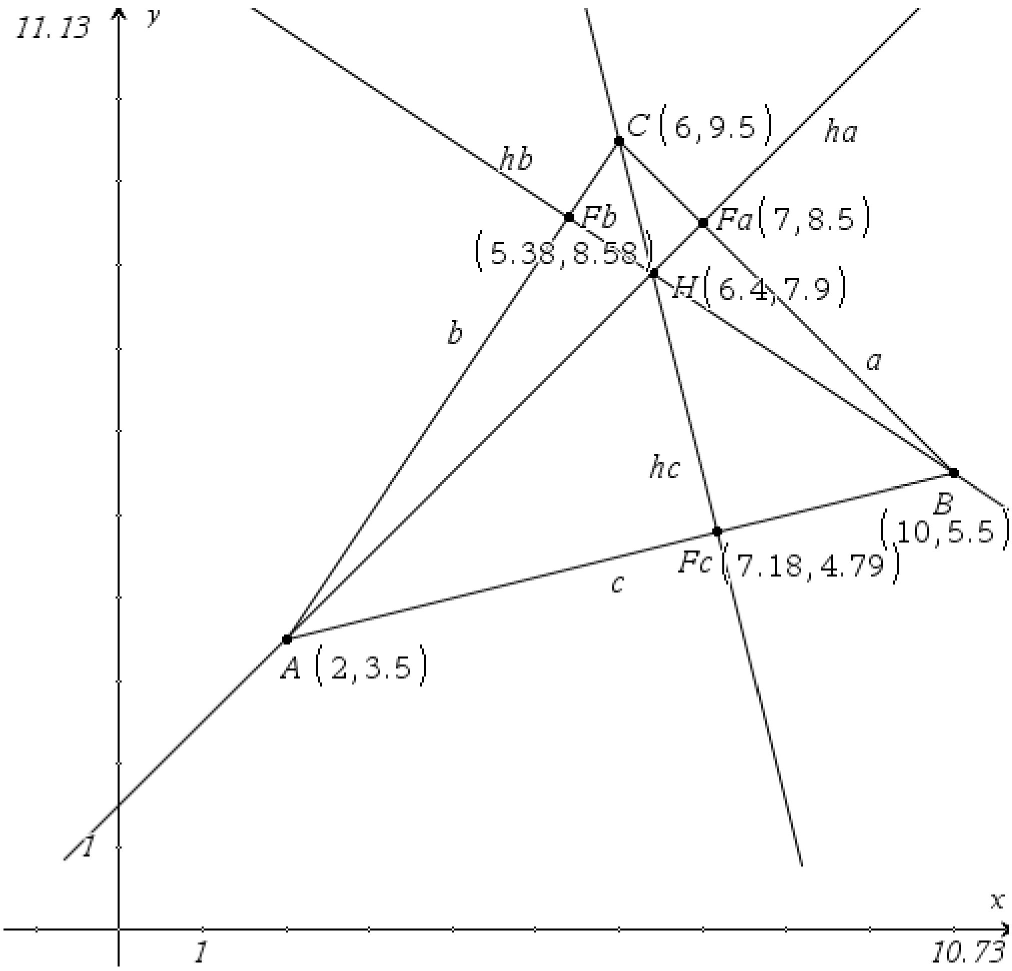
H.........Höhenschnittpunkt

h_c.......Höhe auf die Seite AB (c) (durch den Eckpunkt C)

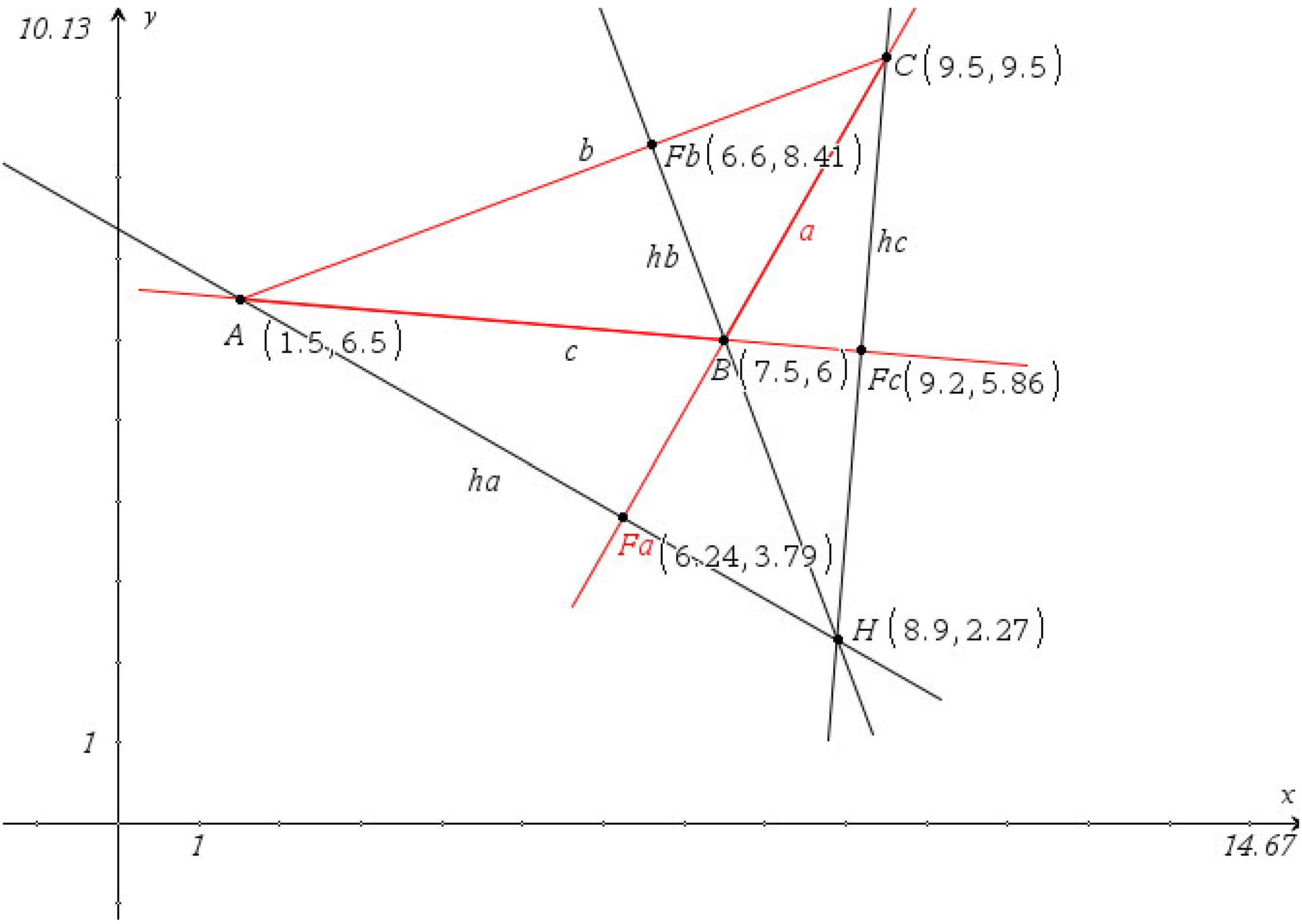
h_a.......Höhe auf die Seite BC (a) (durch den Eckpunkt A)

h_b.......Höhe auf die Seite AC (b) (durch den Eckpunkt B)

Beispiel für eine Konstruktion von H im spitzwinkeligen Dreieck



Beispiel für eine Konstruktion von H im stumpfwinkeligen Dreieck



3 Der Schwerpunkt

Die Schwerlinie ist die Verbindung vom <u>Mittelpunkt</u> einer Dreiecksseite zum <u>gegenüberliegenden Eckpunkt.</u>

*Der Schnitt der 3 Schwerlinien in einem Punkt ergibt den **Schwerpunkt S .***

Er liegt stets <u>innerhalb</u> des Dreiecks!

***Die Schwerlinie <u>steht nicht normal</u>** auf die Dreiecksseite!*

<u>Konstruktionsgang für die Schwerlinie</u>

1.) Halbiere die Seite des Dreiecks mittels Streckensymmetrale (siehe Unterkapitel 1.):“Umkreismittelpunkt“ sowie Veranschaulichung im nächsten Absatz)
Du erhältst den Mittelpunkt der Dreiecksseite.

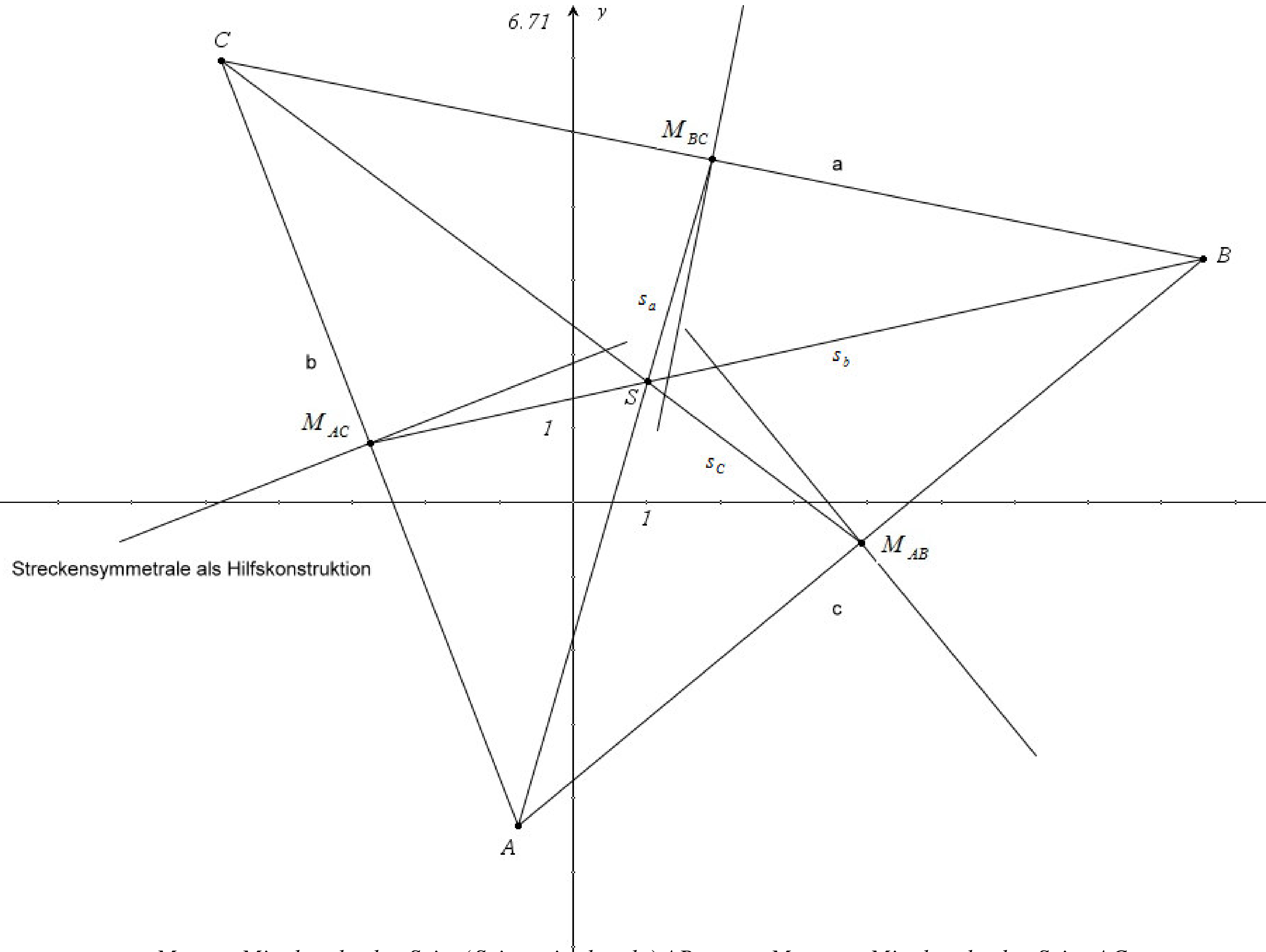
(zeichne eine nicht all zu lange Normale->also nicht über die Seite schneidend hinaus)

2.) ziehe eine Linie vom *<u>Mittelpunkt</u>* zum *<u>gegenüberliegenden Eckpunkt</u>*

Ein paar Bemerkungen dazu im nächsten Absatz (Veranschaulichung)

Bei der Konstruktion der Schwerlinie selbst gibt es keine Normale, sie ist nur die Verbindung zwischen 2 speziellen Punkten, eine Normale wird nur bei der Konstruktion des Mittelpunkts als Punktermittlung als Hilfslinie gelegt!!!

Merke: **H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.**



M_{AB}......*Mittelpunkt der Seite (Seitenmittelpunkt) AB* M_{AC}........*Mittelpunkt der Seite AC*

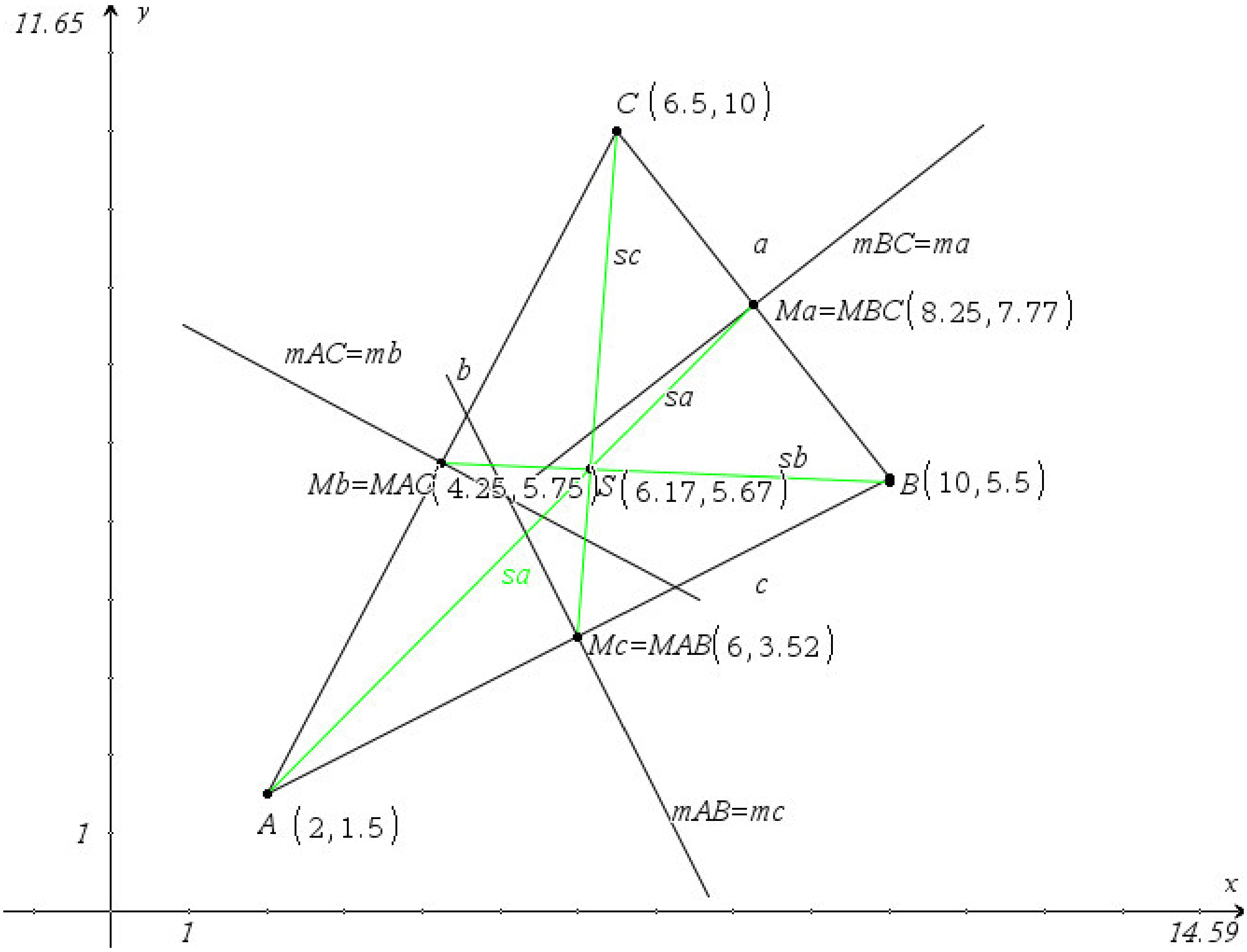
M_{BC}.......*Mittelpunkt der Seite BC*

s_a.........*Schwerlinie auf die Seite* $a =$ *Strecke* $\overline{M_{BC}A}$

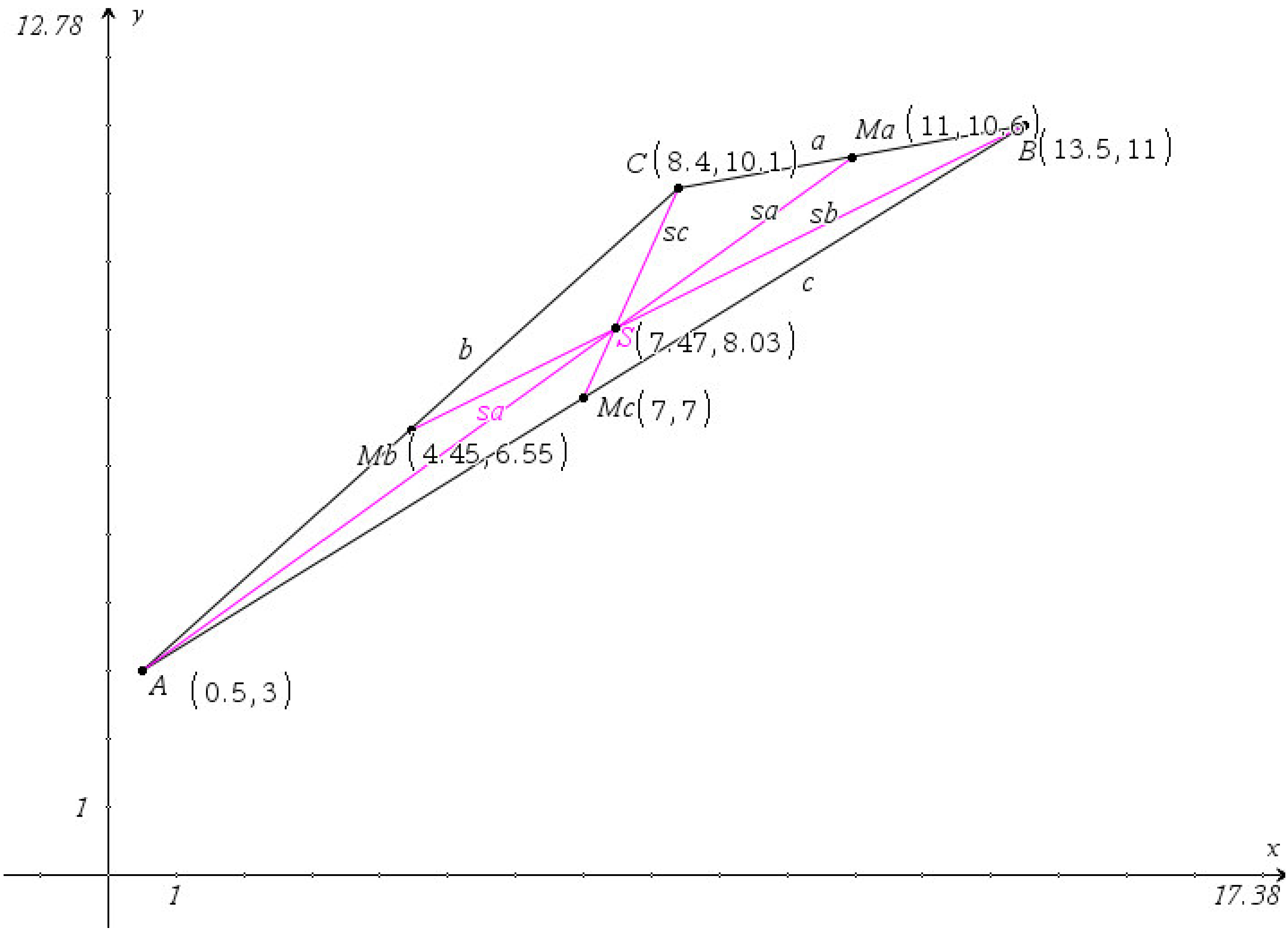
s_b.........*Schwerlinie auf die Seite* $b =$ *Strecke* $\overline{M_{AC}B}$

s_C...........*Schwerlinie auf die Seite* $c =$ *Strecke* $\overline{M_{AB}C}$

Beispiel für eine Konstruktion von I im spitzwinkeligen Dreieck



Beispiel für eine Konstruktion von S im stumpfwinkeligen Dreieck



4 Der Inkreismittelpunkt

Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der 3 ***Winkelsymmetralen.***

Er liegt immer *innerhalb* der Dreiecksfläche!

Der Inkreis berührt die 3 Dreiecksseiten „von innen“ in den *3 Berührpunkten der Seiten mit dem Inkreis.*

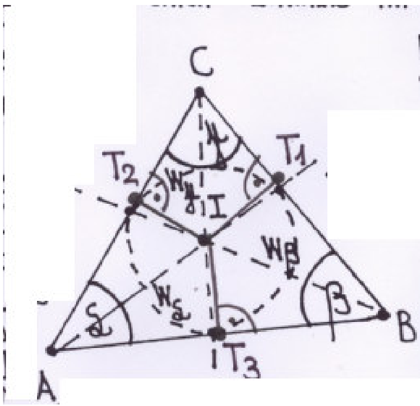
Die Winkelsymmetralen **halbieren** die Winkel, aber die *dem Winkel gegenüberliegenden* Seite im *Allgemeinen nicht und stehen auch nicht auf diese normal!!!!*

*Willst du den **Radius des Inkreises** ρ (Rho) konstruieren so ziehst du Normale auf die Dreiecksseiten zum Inkreismittelpunkt I. Der jeweilige Schnittpunkt der Normalen mit der Dreiecksseite wird **Berührpunkt des Inkreises** genannt. Es gibt also **3 Berührpunkte** des Inkreises im Dreieck: T_1, T_2 und T_3!*

In A ist der Winkel α (Alpha)

In B ist der Winkel β (Beta)

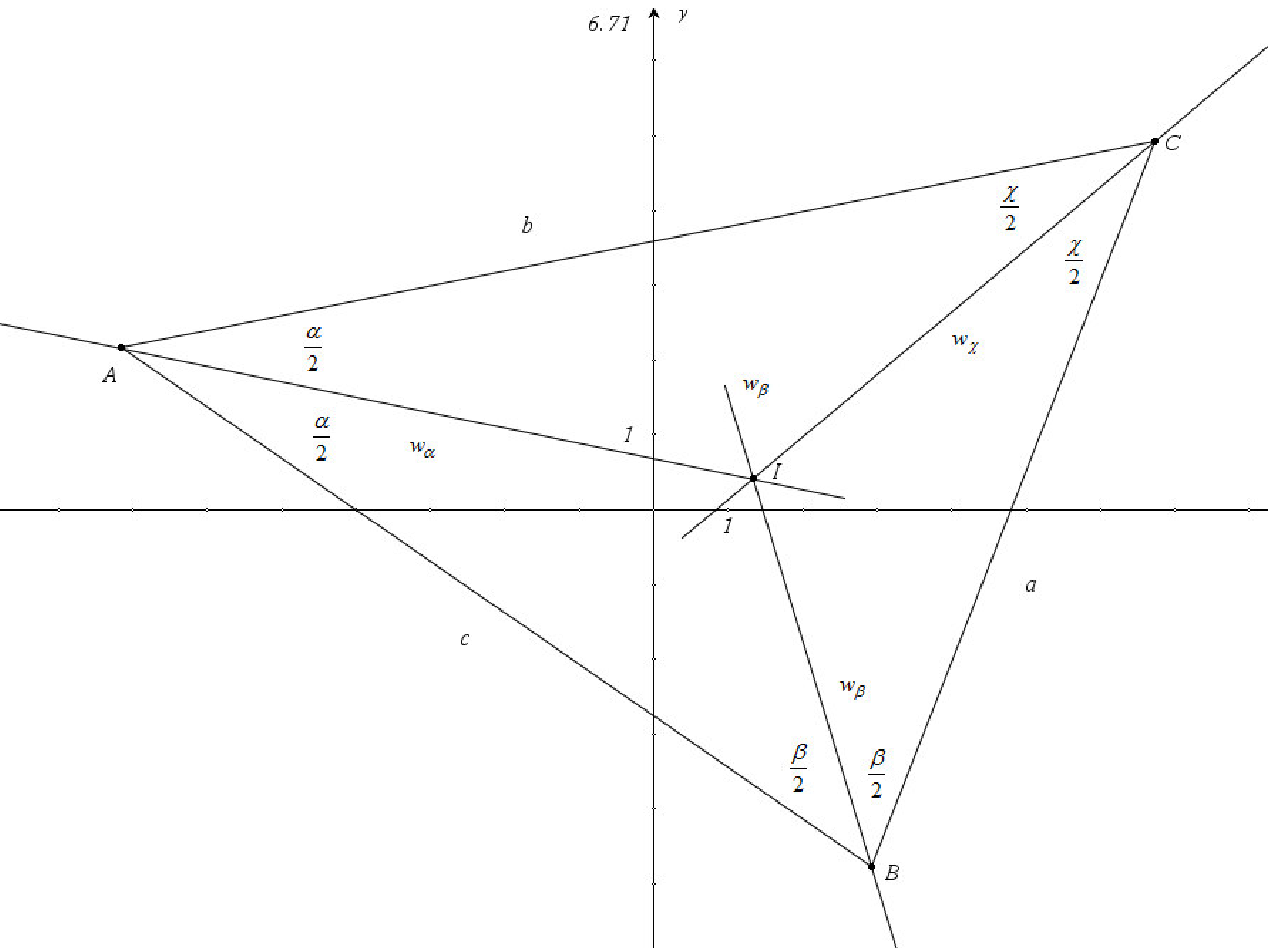
In C ist der Winkel χ (Gamma)



Der Inkreis darf nie über eine Dreiecksseite hinausgehen!!!

Passe daher zuerst mit dem Zirkel deinen Kreis in den 3 Seitenberührpunkten an ,bevor du ihn durchziehst!!!

Merke: **H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.**



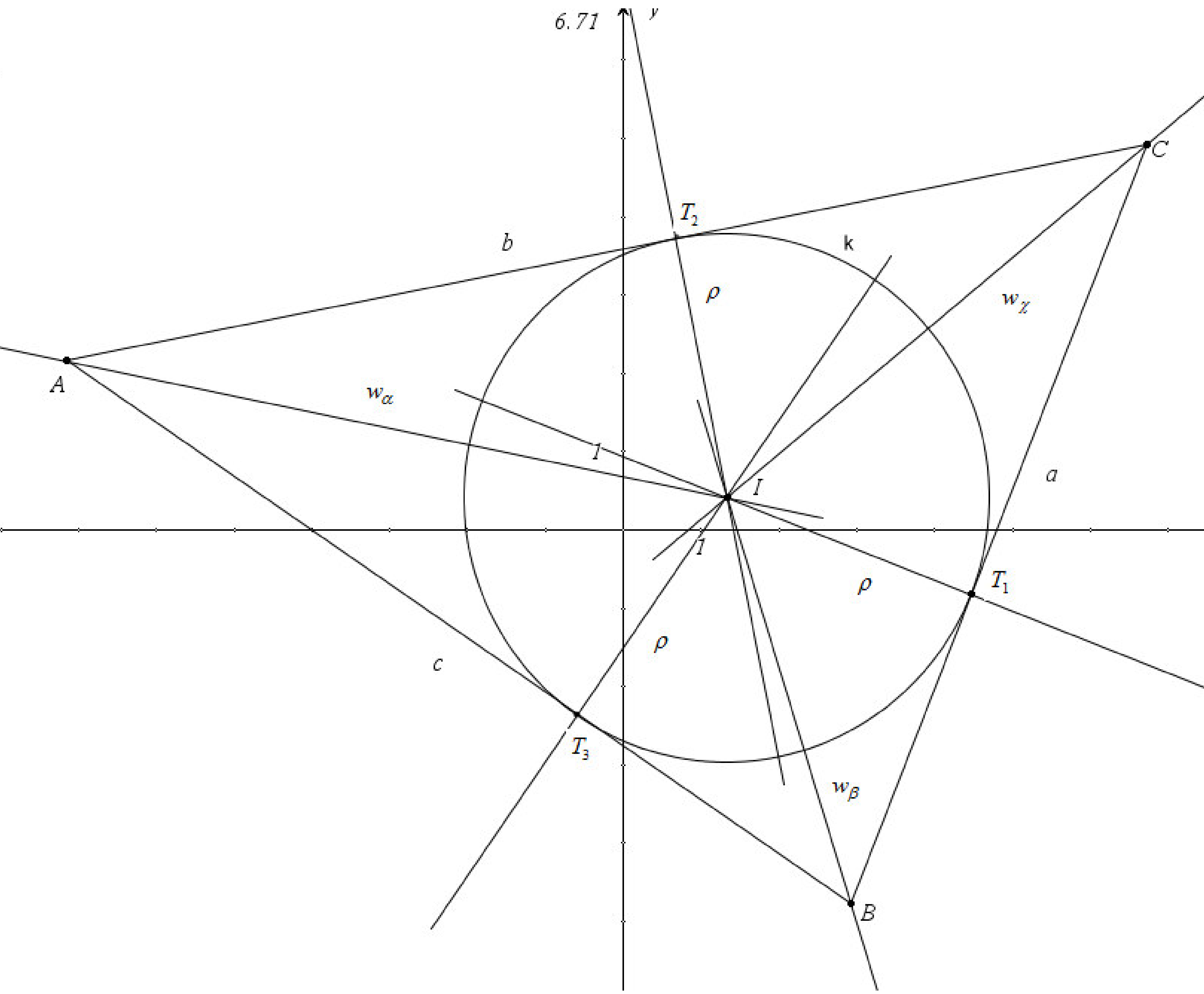
w_α.......*Winkelsymmetrale des Winkels* α w_β.........*Winkelsymmetrale des Winkels* β

w_γ..........*Winkelsymmetrale des Winkels* γ

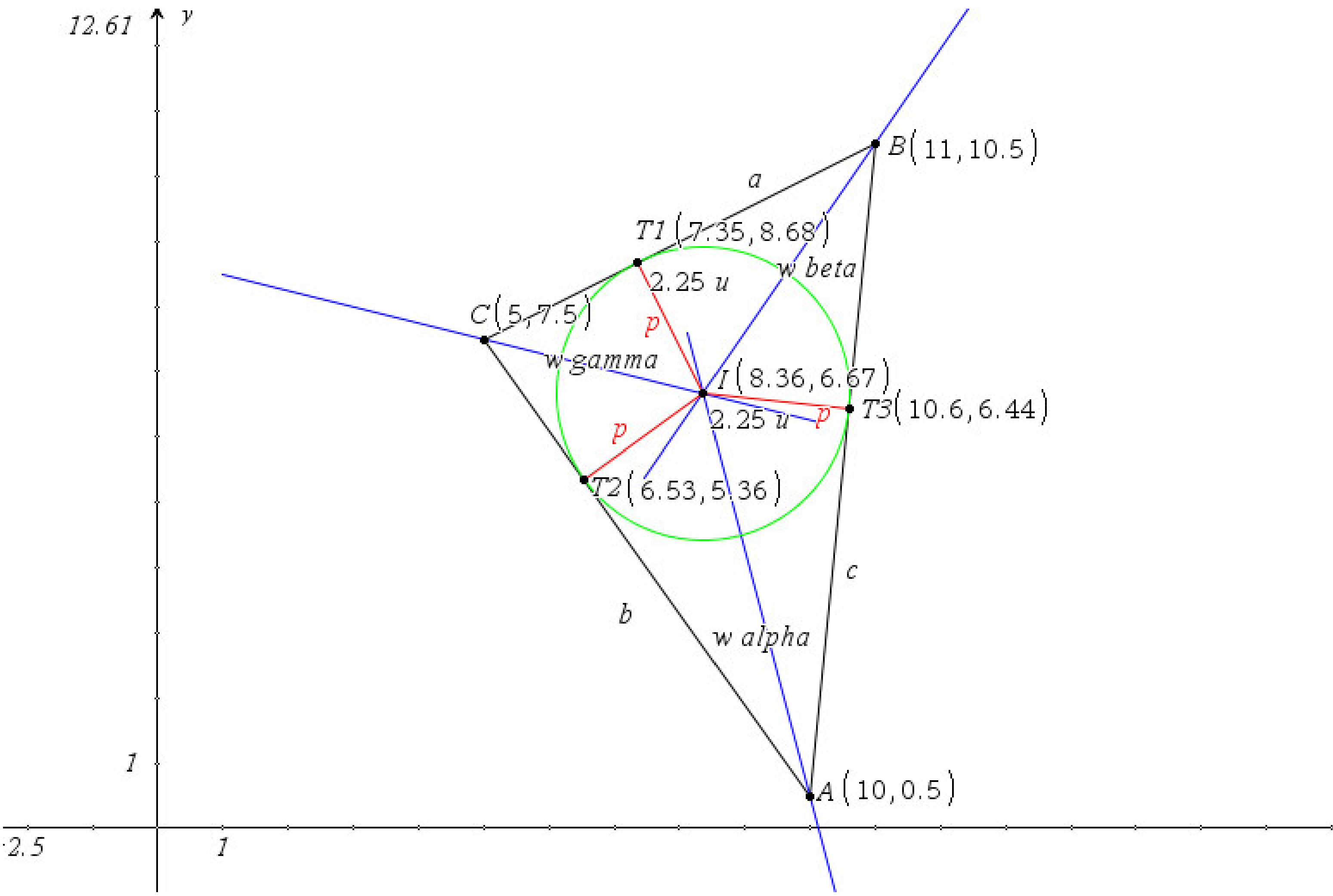
Die Winkelsymmetralen halbieren also die 3Winkel

T_1.......*Berührpunkt des Inkreises mit derSeite a* T_2........*Berührpunkt des Inkreises mit derSeite b*
T_3........*Berührpunkt des Inkreises mit derSeite c*

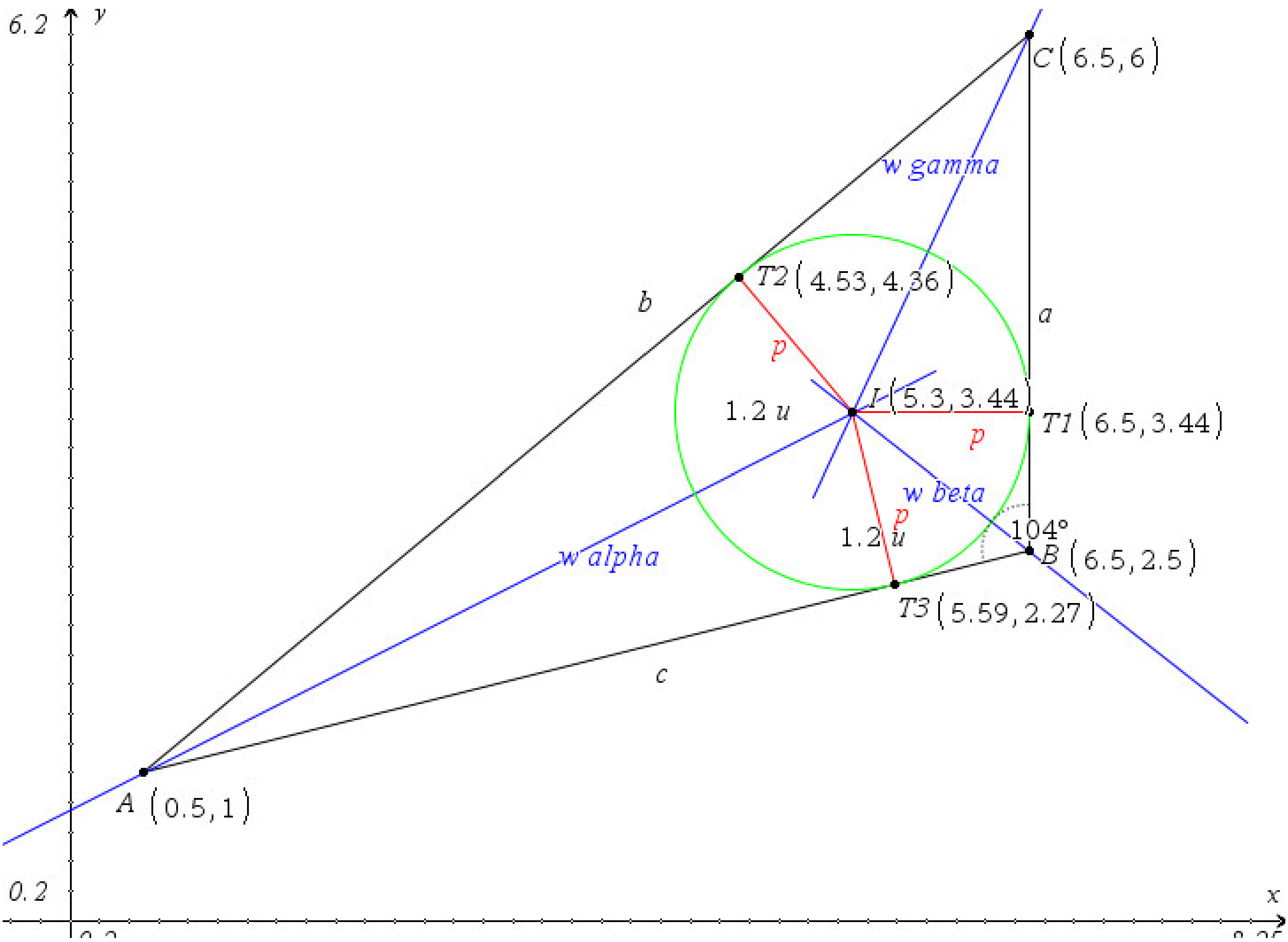
ρ......*RHO.....Radius des Inkreises*
I.......*Inkreismittelpunkt*



Beispiel für eine Konstruktion von I im spitzwinkeligen Dreieck



Beispiel für eine Konstruktion von I im stumpfwinkeligen Dreieck



Die Eulersche Gerade e

Die Eulersche Gerade, benannt nach dem berühmten Schweizer Mathematiker *Leonhard Euler*, verläuft durch die 3 besonderen Punkte U,H und S in jedem Dreieck, egal ob dieses stumpf-,spitz-oder rechtwinkelig, gleichschenkelig, gleichseitig….. ist.

Sie verläuft **nicht** durch den **Inkreismittelpunkt I !!!!!!!!**

Merke dir:

eUler**S**c**H**e Gerade - >es kommt kein „I" im Text vor

Überlege: *(->>siehe Abbildung)*

Konstruierst du zuerst den Umkreismittelpunkt, hast du bereits den Mittelpunkt der Seiten mit der Normalen bestimmt und hast somit für den Schwerpunkt die Verbindungspunkte.